الدكتور : اسماعيل بوجعدار
جامعة منتوري - قسنطينة

ة الملاذ للفيزياء الجامعية

الكهرباء الساكنة

السنة الأولى جامعي

LMD

SM - ST - MI

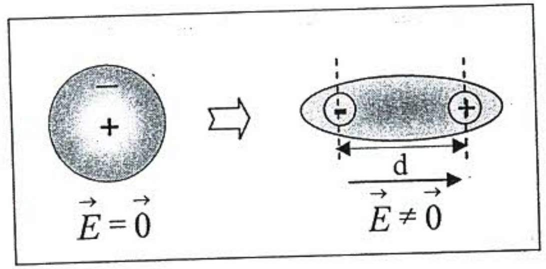
نوميديا
للطباعة و النشر و التوزيع

نوميديا
للطباعة و النشر و التوزيع
22، شارع عبد المالك قيطوني
قسنطينة - الجزائر
هاتف/فاكس : 61 25 92 (31) 213+
بريد الكتروني : dar_numidia@yahoo.fr

1.V مقدمة

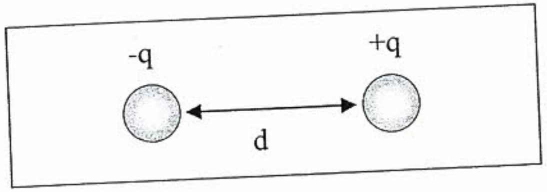
عادة ما يصادفنا عند دراستنا لبعض فروع الفيزياء والكيمياء مفهوم الجزيئات الكيميائية، بعض هذه الجزيئات قطبية (وجود مسافة بين مركزي الشحنتين السالبة والموجبة) وبعضها الآخر لا قطبي (إنطباق مركزي الشحنتين). في أغلب الأحيان تكون الذرات والجزيئات والأوساط المادية متعادلة كهربائيا، وأحيانا ينزاح مركز دوران الشحنات السالبة والموجبة، فنتكلم عن استقطاب الذرة أو الجزيء أو الوسط.

فمثلا عند وضع جزيء لا قطبي أو ذرة في حقل كهربائي خارجي، فإن هذا الحقل يعمل على تشويه الشحنة السالبة بتمديد المدارات الإلكترونية في إتجاه معاكس لإتجاه الحقل $(\vec{F}=q\vec{E}\,, q<0)$ (ش: V-1)، فينتقل مركز دوران الشحنة السالبة، وينتج ما يسمى ثنائي قطب كهروستاتيكي محثث (متحرض). بانعدام الحقل ينعدم الإستقطاب ويزول ثنائي القطب المحثث.



2.V تعريف

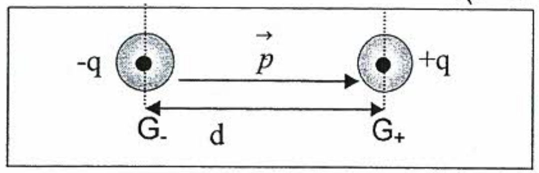
ثنائي القطب الكهروستاتيكي الدائم عبارة عن جملة، تتكون من شحنتين كهربائيتين – أو سحابتين شحنيتين – متساويتين في المقدار، ومختلفتين في الإشارة $(+q,-q)$، بينهما مسافة d صغيرة نسبيا مقارنة بالأبعاد التي ندرس فيها التأثيرات الناشئة عن الشحنة (الحقل والكمون) ، ومحورها المستقيم الواصل بين الشحنتين (ش:2-V).



يجد التطبيق العملي للنموذج النظري لثنائي القطب في استقطاب الجزيئات المكونة للمادة الناقلة والعازلة على حد سواء، لذلك من الأهمية بمكان دراسة الخصائص الكهربائية لهذه التركيبة: كالحقل وخطوطه والكمون وسطوحه المتساوية.

3.V عزم ثنائي القطب

يمكن فصل توزيع شحني متعادل كهربائيًا، بصفة عامة، وذلك بعزل الشحنات الموجبة $+q$ عن الشحنات السالبة q^-، ويصبح عندها الجسم الذي يحمل هذا التوزيع مستقطبا. لأجل وصف الثنائي وصفًا كميًا، يستعمل مفهوم عزم ثنائي القطب الكهربائي، والذي يعرف على أنه يساوي: حاصل جداء الشحنة q بالشعاع الواصل بين مركزي الشحنتين والمتجهة من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة (ش: 3-V).



$$\vec{P} = q\,\overrightarrow{G_-G_+} = q\,\vec{d} \qquad [\text{م:1-V}]$$

و حدة قياس عزم الثنائي في الجملة الدولية هي الكولوم متر C.m، لكن هذه الوحدة ليست ملائمة، لصغر الشحنات والأبعاد التي نتعامل معها، خاصة في الكيمياء، لذلك ندخل تعريف الوحدة التي تعبر عن رتبة عزم الثنائي في الجزيئات الكيميائية، وهي وحدة لا تنتمي لأية جملة قياس وتسمى الديباي Debye .

$$1D = \frac{1}{3}\cdot 10^{-29}\ \text{C.m}$$

شدة العزوم الثنائية تتراوح مابين أجزاء من الديباي إلى بعض مضاعفات الديباي، الجدول المقابل [جـ:1-V] يوضح بعض العزوم في ثنائيات جزيئية مستقطبة دوما.

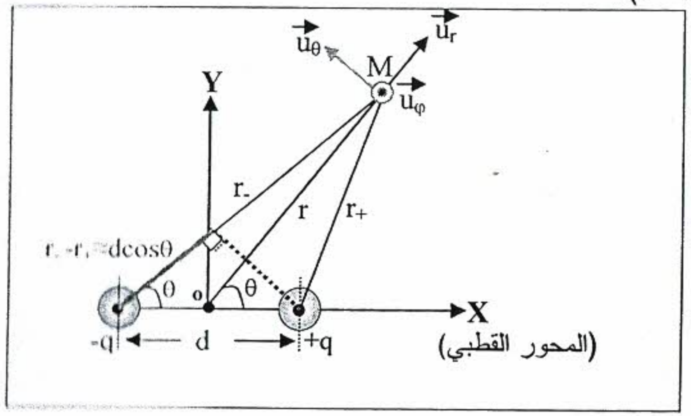
الجزيء	شدة العزم القطبي P
H_2O	$6,2.10^{-30}$C.m ≈1,8 D
HCl	$3,43.10^{-30}$ C.m ≈ 1,1 D
SO_2	$5,3.10^{-30}$ C.m ≈ 1,59 D

ملاحظة:

- ليست كل الجزيئات تملك عزمًا قطبيًا. بوجود تناظر معين في تركيبة جزيء كما في حالة H_2، O_2، CH_4 (الميثان)، هناك غياب كلي للعزم القطبي.
- ثنائي القطب الدائم هو ثنائي المسافة بين شحنتيه d ثابتة، وبالتالي شعاع عزمه ثابت بالنسبة لمعلم مرتبط بالمحور $\overline{G_-G_+}$.
- في الجزيئات القطبية الكيميائية المحتثة مثلا (أين يظهر ثنائي قطب محتث بوجود حقل خارجي)، يعطى عادة العزم الكهربائي القطبي المحتث بـ: $\vec{p} = \alpha\,\varepsilon_0 \vec{E}$ حيث α هو معامل إستقطابية الجزيء وهو بدون وحدة.

4.V خصائص ثنائي القطب الدائم

نريد حساب الأفعال والتأثرات الناتجة عن ثنائي قطب (الكمون والحقل) عند نقطة M بعيدة ($r >> d$: هذا الشرط يسمى شرط المقاربة القطبية) هذه النقطة معرفة بإحداثياتها القطبية (r,θ) (ش: 4-V).



1.4: حساب الكمون القطبي (كمون ثنائي القطب).

هذه التركيبة منتهية، ومنه يمكن أخذ الكمون الصفري في المالانهاية. من الشكل (ش:4-V)، ومن علاقة الكمون الناشئ عن تجمع شحني، يكتب كمون الثنائي كمايلي:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right) \qquad [\text{م:2-V}]$$

و بالأخذ في الإعتبار بالتقريب القطبي ($r >> d$):

$$r_- - r_+ \approx d\cos\theta$$

$$r_- r_+ \approx r^2$$

نجد:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}P\frac{\cos\theta}{r^2} \qquad [\text{م: 3-V}]$$

حيث: $P=qd$: تمثل طويلة عزم ثنائي القطب الكهروستاتيكي.

ملاحظـــات:

على عكس الشحنة النقطية الذي كمونها يتناسب عكسيا مع البعد عن نقطة الملاحظة، فإن كمون الثنائي يتناسب عكسيا مع مربع البعد ($V\alpha \frac{1}{r^2}$)، أي أنه يتناقص بسرعة أكبر من تناقص كمون الشحنة النقطية.

إذا وضعنا $\vec{r} = \vec{OM}$ ، فإنه يمكن كتابة عبارة الكمون كمايلي:

$$V = \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\vec{r} \qquad \text{[م: V-4]}$$

لكن نعلم أن: $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$ إذا:

$$V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}.\vec{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \text{[م: V-5]}$$

4-ب: الحقل القطبي (حقل ثنائي القطب)

يمكن كتابة عبارة الحقل الناشئ عند النقطة M إنطلاقا من الشكل (ش: V-4) كمايلي:

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{u}_{r_+}}{r_+^2} - \frac{\vec{u}_{r_-}}{r_-^2}\right) \qquad \text{[م: V-6]}$$

نشر عبارة الحقل هذه صعب للغاية، لذلك نستنتج مركبات الحقل إنطلاقا من العلاقة التي تربط الحقل بالكمون، وذلك بكتابة تدرج الكمون في الإحداثيات الكروية ($\vec{E} = -\vec{grad}\,V$).

أ. شعاع الإزاحة العنصرية:

$$\vec{dr} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

ب. شعاع الحقل:

$$\vec{E} = E_r\,\vec{u}_r + E_\theta\,\vec{u}_\theta + E_\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

ج. من علاقة الكمون بالحقل:

$$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dr}$$

$$dV = -\vec{E}.\vec{dr} = -(E_r dr + r\,E_\theta d\theta + r\sin\theta\,E_\varphi d\varphi) \qquad \text{[م: V-7]}$$

د. وعبارة التفاضل التام للكمون:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi}d\varphi \qquad \text{[م: V-8]}$$

من المعادلات [م: V-3] و[م: V-7] و[م: V-8] نجد:

$$E_r = \frac{-dV}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2P\cos\theta}{r^3} \qquad \text{[م: V-9]}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} \qquad \text{[م: V-10]}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{dV}{d\varphi} = 0 \qquad \text{[م: V-11]}$$

ومنه عبارة الحقل لثنائي القطب الكهروستاتيكي:

$$\vec{E} = E_r\,\vec{u}_r + E_\theta\,\vec{u}_\theta + E_\varphi\,\vec{u}_\varphi = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta\right) \qquad \text{[م: V-12]}$$

شدة الحقل تعطى بـ:

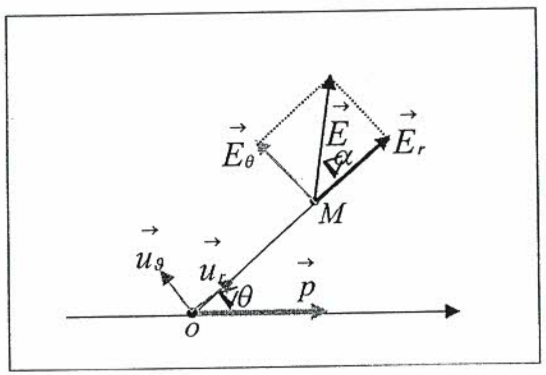
$$\left|\vec{E}\right| = E(r,\theta) = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{r^3}\left(1+3\cos^2\theta\right)^{1/2} \qquad \text{[م: V-13]}$$

ملاحظـــات:

حقل الثنائي يتناقص بسرعة أكبر ($E\alpha\frac{1}{r^3}$) من تناقص الحقل الناشئ عن الشحنة النقطية ($E\alpha\frac{1}{r^2}$).

إتجاه حقل ثنائي القطب (ش: V-5):

$$\tan\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta \qquad \text{[م: V-14]}$$



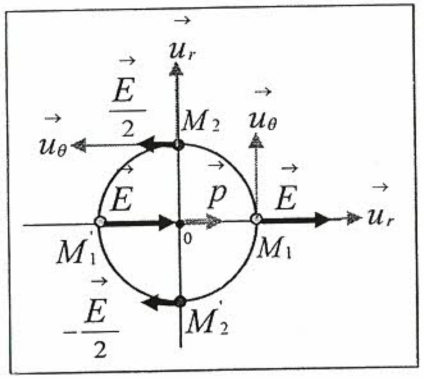
5.V مواقع غوص الأساسية

هي المواقع التي يكون عندها الحقل $\vec{E}$ وعزم الثنائي $\vec{p}$ على نفس الحامل (ش: 6-V). نميز نوعين من المواقع:

أ) مواقع غوص الأساسية الأولى:

وهي المواقع المكافئة لـ $E_\theta = 0$ (النقطتين M_1 و M_1' الواقعتين على المحور الأفقي)، أي:

$$E_\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ أو } \theta = \pi.$$



ب) مواقع غوص الأساسية الثانية:

وهي المواقع المكافئة لـ $E_r = 0$ (النقطتين M_2 و M_2' الواقعتين على المحور الشاقولي)، أي:

$$E_r = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ أو } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

من العلاقتين [م: 10-V] و[م: 11-V] يمكن تشكيل الجدول الآتي (جـ. 1-V) الملخص لمواقع غوص الأساسية.

مواقع غوص	θ	E_r	E_θ
مواقع غوص الأولى M_1 و M_1'	0	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$	0
	π	$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$	0
مواقع غوص الثانية M_2 و M_2'	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$
	$3\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$

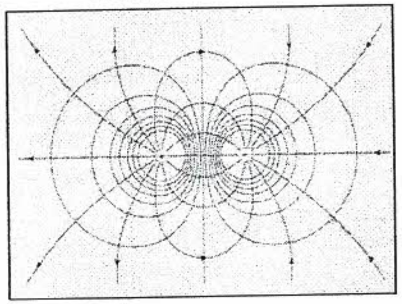
6.V طبوغرافيا الحقل والكمون

6.أ: سطوح تساوي الكمون:

من علاقة الكمون [م: 3-V]، تكون سطوح تساوي الكمون عبارة عن سطوح محورها المحور القطبي $\overrightarrow{OX}$. المعادلة القطبية لخط تساوي الكمون المكافئة للكمون V_0 تعطى بـ:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\cos\theta}{r^2} = V_0 = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{p}{4\pi\,\varepsilon_0 V_0}\cos\theta$$



ومنه: $r^2 = A\cos\theta$ [م: 15-V]

حيث: $A = \frac{p}{4\pi\,\varepsilon_0 V_0}$

يكون موجبا إذا كانت $\cos\theta$ موجبة ويكون سالبا إذا كانت $\cos\theta$ سالبة.

6.ب: خطوط الحقل:

من علاقة خط الحقل في الإحداثيات الأسطوانية (أو) الكروية [م: 10-III] نبحث عن معادلة خط الحقل لثنائي القطب الكهروستاتيكي، من مركبات الحقل في الإحداثيات القطبية [م: 10-V] و[م: 11-V].

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta}d\theta = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow d(\ln r) = dl\left(Ln(\sin\theta)^2\right)$$

$$\Rightarrow r = k\left(\sin^2\theta\right) \qquad [\text{م: } 16\text{-V}]$$

و هي معادلة قطبية تضم ثابتا k، من أجل قيم مختلفة لـ k، نتحصل على شبكة من خطوط الحقل (ش: 7-V).

ملاحظة:

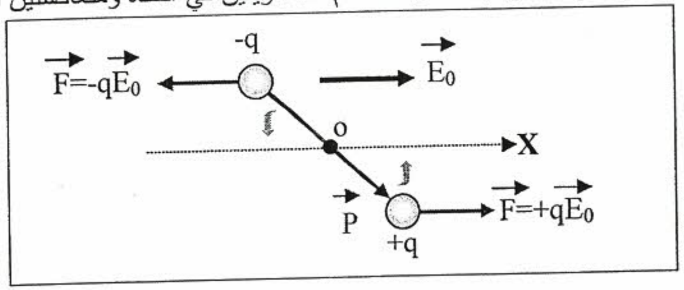
شعاع الحقل، دوما مماسيا لخطوط الحقل، وخطوط الحقل دومًا عمودية على سطوح تساوي الكمون.

7.V الثنائي في حقل كهربائي خارجي

نفترض أن الثنائي صلبًا غير قابل للتشوه، أي أن المسافة بين الشحنتين تبقى ثابتة وأن الشحنتين ثابتتين أيضا. توصف الأفعال الميكانيكية المطبقة على الثنائي بالقوة المحصلة $\vec{F}$ وعزمها حول نقطة محددة.

7.أ: الحقل منتظم:

ليكن ثنائي قطب داخل حقل كهربائي منتظم $\vec{E_0}$ (ش: V-8). القوتين المطبقتين على الشحنتين $-q$ و $+q$ من قبل الحقل المنتظم، متساويتين في الشدة ومتعاكستين في الإتجاه.



أ. محصلة القوى:

محصلة القوى المطبقة على الثنائي الموضوع داخل حقل منتظم معدومة.

$$\vec{F}=\vec{F}_-+\vec{F}_+=\vec{0}$$ [م: V-16]

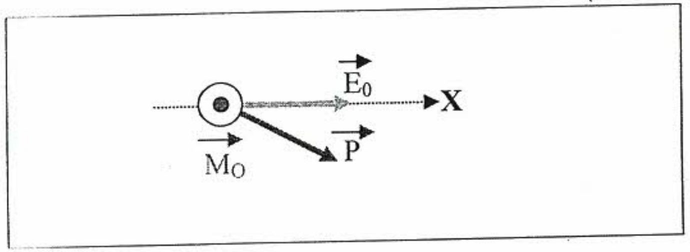
و بالتالي الثنائي يخضع لمزدوجة قوى، تحاول تدويره حول نقطة المركز **0**.

ب. عزم المزدوجة:

نحسب عزم المزدوجة (محصلة القوى معدومة) بالنسبة للنقطة **o** مركز البعد بين الشحنتين.

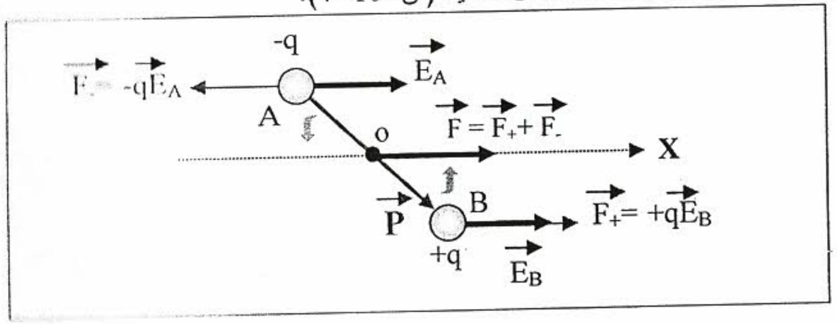
$$\begin{aligned}\vec{M}_o &= \left(\frac{\vec{d}}{2}\right)\wedge\left(q\,\vec{E}_0\right)+\left(-\frac{\vec{d}}{2}\right)\wedge\left(-q\,\vec{E}_0\right)\\ &= \vec{d}\wedge\left(q\,\vec{E_0}\right)\\ &= q\,\vec{d}\wedge\vec{E_0}\\ &= \vec{p}\wedge\vec{E_0}\end{aligned}$$ [م: V-17]

إذن، في حقل منتظم، يخضع الثنائي لمزدوجة تحاول تدويره، بهدف توجيه عزمه $\vec{p}$ بإتجاه الحقل $\vec{E_0}$ (ش: V-9).



7.ب: الحقل غير منتظم:

إذا وضع الثنائي داخل حقل غير منتظم، فإنه يخضع من جهة إلى عزم تدويري يحاول توجيهه بإتجاه الحقل الخارجي، ومن جهة ثانية، عند ما يصبح في نفس إتجاه الحقل يخضع لقوة تحاول تحريكه بإتجاه المناطق ذات شدة الحقل العالية (ش: V-10).



أ. محصلة القوى:

في هذه الحالة $\left|\vec{E_A}\right|\neq\left|\vec{E_B}\right|$ ومنه: $\left|\vec{F_-}\right|\neq\left|\vec{F_+}\right|$

و بالتالي محصلة القوى غير معدومة، وتحاول تحريك الثنائي (مركز كتلته 0) حركة إنتقالية بإتجاه يعتمد على شدة الحقل عند النقطتين A و B.

$$\vec{F}=\vec{F}_-+\vec{F}_+=q\left(\vec{E_A}+\vec{E_B}\right)$$ [م: V-17]

في وجود تدرج للحقل ، يمكن كتابة محصلة القوى المؤثرة على الثنائي كمايلي:

$$d\vec{F}=q\,d\vec{E}$$ [م: V-18]

و بما أن $d\vec{F}$ عبارة عن تفاضل، يمكن كتابة عبارة مركبة القوة على المحور OX مثلا:

كمايلي:

$$dF_x = q\left[\frac{dE_x}{dx}dx + \frac{dE_x}{dy}dy + \frac{dE_x}{dz}dz\right]$$

$$dF_x = qdx\frac{dE_x}{dx} + qdy\frac{dE_x}{dy} + qdy\frac{dE_x}{dy} + qdz\frac{dE_x}{dz}$$ و [م: V-19]

الحدود (qdx, qdy, qdz) تمثل عزم ثنائي القطب العنصري أي:

$$d\vec{p} = qdx\,\vec{i} + qdy\,\vec{j} + qdz\,\vec{k}$$ [م: V-20]

من هذين المعادلتين، يمكن إيجاد مركبة القوة F_x :

$$F_x = P_x\frac{dE_x}{dx} + P_y\frac{dE_x}{dy} + P_z\frac{dE_x}{dz}$$

$$= \vec{p}\cdot\overrightarrow{grad}\,E_x$$ [م: V-21]

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل بقية مركبات القوة.

$F_y = \vec{p}\cdot\overrightarrow{grad}\,E_y$ و $F_z = \vec{p}\cdot\overrightarrow{grad}\,E_z$

هذه المركبات تمثل مركبات القوة المؤثرة على ثنائي قطب موضوع في حقل غير منتظم (حقل تدرجي).

ب. عزم محصلة القوى:

العزم الناشئ عن محصلة القوى المؤثرة على الثنائي، عند نقطة 0، يحسب إنطلاقا من جمع عزمي القوتين $\vec{F}_+, \vec{F}_-$، الناشئتين عن حقل شبه منتظم $\left(\left|\vec{E_A}\right| = \left|\vec{E_B}\right|\right)$.

$$\vec{M_0} = \vec{OA}\wedge\vec{F}_- + \vec{OB}\wedge\vec{F}_+$$
$$= \vec{OA}\wedge\left(-q\,\vec{E_A}\right) + \vec{OB}\wedge\left(+q\,\vec{E_B}\right)$$
$$= \vec{AB}\wedge q\,\vec{E}$$
$$= q\,\vec{AB}\wedge\vec{E}$$
$$= \vec{p}\wedge\vec{E}$$ [م: V-22]

ملخص

- ثنائي القطب الكهروستاتيكي، عبارة عن زوج شحني، متساويين في المقدار ومختلفين في الإشارة، ويوصف بعزم: $\vec{p} = q\,\vec{d}$.
- يحسب الحقل والكمون على مسافة بعيدة، مقارنة بالبعد بين الشحنتين $(r >> d)$، هذا الشرط يسمى بشرط التقريب القطبي.
- كمون وحقل ثنائي القطب يتناقصان بسرعة أكبر من تناقص كمون وحقل شحنة نقطية.

	شحنة نقطية	ثنائي قطب
الكمون	$V \propto \frac{1}{r}$ $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	$V \propto \frac{1}{r^2}$ $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$
الحقل	$E \propto \frac{1}{r^2}$ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u_r}$	$E \propto \frac{1}{r^3}$ $E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$ $E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$

- يخضع الثنائي في حقل منتظم إلى مزدوجة (قوتين متساويتين في الشدة ومتعاكستين في الإتجاه) تحاول تدويره حول النقطة 0 بهدف توجيه عزمه $\vec{P}$ بإتجاه الحقل الخارجي $\vec{E}$.
- يخضع الثنائي في حقل غير منتظم إلى محصلة قوى غير معدومة، تحاول سحبه بإتجاه المناطق ذات الحقل العالي، وعزم تدويري يحاول توجيهه بإتجاه الحقل الخارجي.

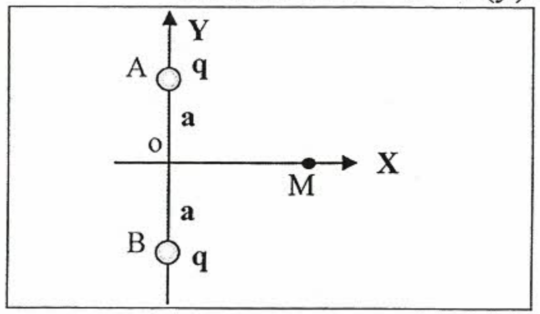
تمارين محلولة

التمرين 01:

جد إنطلاقا من الشكل الآتي (ش: V−10)

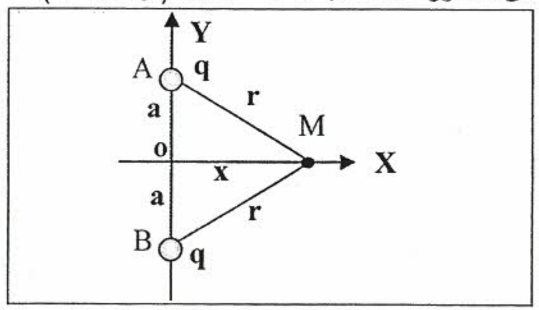
أ. الكمون $V(x)$ على المحور $\vec{OX}$ والكمون على $V(y)$ المحور $\vec{OY}$

ب. الحقلين $\vec{E}(x)$ و $\vec{E}(y)$ على المحورين $\vec{OX}$ و $\vec{OY}$.



الحل

أ. ◄ لتكن النقطة M من المحور $\vec{OX}$، حيث: $\overline{OM} = x$ (ش: V−11)



الكمون عند النقطة M من المحور $\vec{OX}$:

$$V(M) = V_A + V_B = 2V_A = 2V_B$$

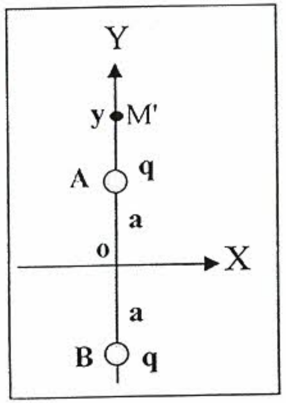
$$V(M) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$V(M) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+q^2}} = V(x)$$

◄ لتكن النقطة `M من المحور $\vec{OY}$، حيث: $\overline{OM`} = y$ (ش: V−12)

الكمون عند `M:

$$V(M`) = V_A + V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|y-a|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|y+a|}$$



و يمكن استنتاج الحالات الآتية:

➤ لما $y \geq a$

$$V(M`) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qy}{(y^2-a^2)}$$

➤ لما $-a \leq y \leq +a$

$$V(M) = \frac{-qa}{2\pi\varepsilon_0(y^2-q^2)}$$

➤ لما $y \leq -a$

$$V(M) = \frac{-qy}{(y^2-a^2)}$$

ب. يستنتج الحقل، إنطلاقا من علاقته بالكمون:

$$\vec{E} = -\vec{grad}\,V$$

➤ على المحور $\vec{OX}$:

$$\vec{E} = -\frac{dV(x)}{dx}\vec{i}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+q^2)^{3/2}}\vec{i}$$

➤ على المحور $\vec{OY}$:

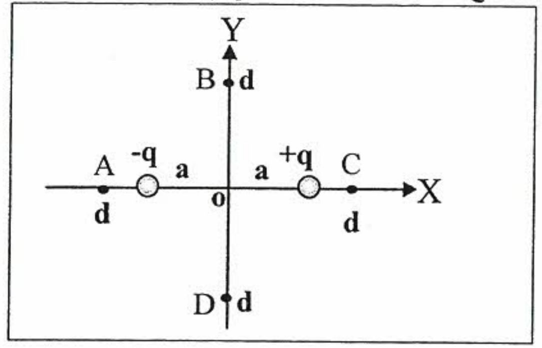
$$\vec{E} = -\frac{dV(y)}{dy}\vec{j}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{q(y^2+a^2)}{(y^2-a^2)^2}\vec{j} & \text{لما} \quad y \geq a \\ -\dfrac{1}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{qay}{(y^2-a^2)^2}\vec{j} & \text{لما} \quad -a \leq y \leq a \\ -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{q(y^2+a^2)}{(y^2-a^2)^2}\vec{j} & \text{لما} \quad y \leq -a \end{cases}$$

التمرين 02:

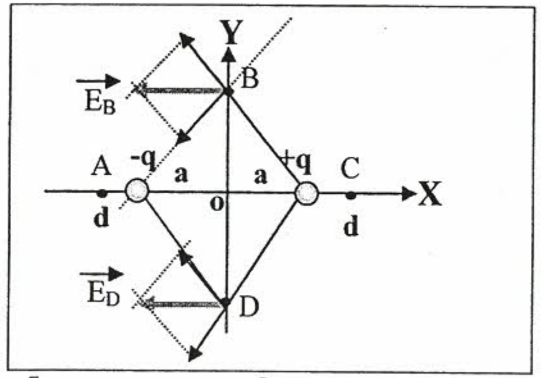
أ. جد الحقل والكمون الناشئين عن ثنائي القطب، عند النقاط D, C, B, A في الشكل الآتي (ش:V-13)

ب. قارن هذه النتائج بالنتائج الخاصة بالتقريب القطبي ($d >> a$).



الحـــل

أ. بالأخذ في الإعتبار بإشارة الشحنتين، يمكن رسم أشعة الحقل عند النقاط المعنية (ش: V-14).



$$\vec{E}_C = \vec{E}_A = \left[K\frac{q}{(d-a)^2} - \frac{kq}{(d+a)^2}\right]\vec{i}$$
$$= \frac{4Kqad}{(d^2-q^2)}\vec{i}$$

$$\left|\vec{E}_B\right| = \left|\vec{E}_D\right| = 2K\frac{q}{(d^2+a^2)}\sin\alpha$$

حيث

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}$$

و منه:

$$\vec{E}_B = \vec{E}_D = -2K\frac{q\,a}{\left[d^2+a^2\right]^{3/2}}\vec{i}$$

الكمون عند النقاط الأربع:

$$V_A = -\frac{Kq}{(d-a)} + \frac{kq}{(d+a)} = \frac{-2kqa}{(d^2-a^2)}$$
$$V_C = \frac{-kq}{(d+a)} + \frac{kq}{(d-a)} = \frac{2kqa}{(d^2-a^2)}$$
$$V_B = V_D = 0$$

ب. في حالة التقريب القطبي ($d >> a$) نجد:

الحقل عند النقاط الأربع:

$$\left|\vec{E}_A\right| = \left|\vec{E}_C\right| = \frac{4kqa}{d^3} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{d^3}$$
$$\left|\vec{E}_B\right| = \left|\vec{E}_D\right| = \frac{2kqa}{d^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{d^3}$$

الكمون عند النقاط الأربع:

$$V_A = \frac{2kqa}{d^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{d^2}$$
$$V_C = \frac{2kqa}{d^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{d^2}$$
$$V_B = V_D = 0$$

نقارن هذه النتائج بعبارات الحقل والكمون في هذه الحالة:

[م: V-7]
$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(2a)\sin\theta}{r^3}$$

[م: V-6]
$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q(2a)\cos\theta}{r^3}$$

[م: V-3]
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q2a\cos\theta}{r^2}$$

- عند النقطة **A**: $\theta = \pi, r = d$
- عند النقطة **C**: $\theta = 0, r = d$
- عند النقطة **B**: $\theta = \frac{\pi}{2}, r = d$
- عند النقطة **D**: $\theta = 3\frac{\pi}{2}, r = d$

بالتعويض نجد نفس النتائج.

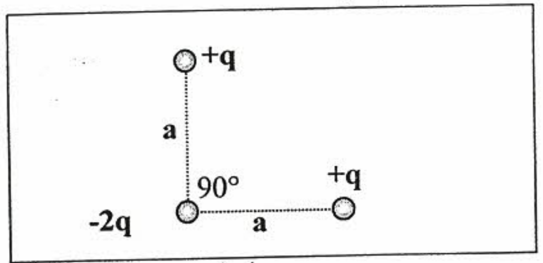
ملاحظة:

هذه النقاط الأربعة، تسمى مواقع غوص الأولى والثانية.

التمرين 03:

أ. أحسب عزم ثنائي القطب للجزيء الآتي وبين إتجاهه (ش: V–15).

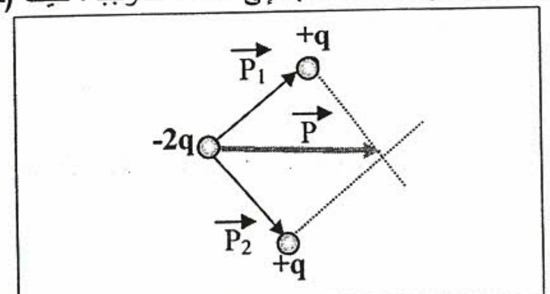
إذا كان: $q=1,6.10^{-19}C, a=10^{-10}m$



ب. إذا وضع الجزيء في حقل شدته $\left|\vec{E}\right| = 300\ V/m$ ، أدرس توازن الجزيء في هذه الحالة.

الحل

أ. عزم ثنائي القطب: يكون من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة، حيث (ش: V–16).



$$\left|\vec{P_1}\right| = \left|\vec{P_2}\right| = qa$$

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2}$$

$$\left|\vec{P}\right| = \sqrt{\left|\vec{P_1}\right|^2 + \left|\vec{P_2}\right|^2} = \sqrt{2}\, qa$$

و إتجاهه يصنع زاوية $\pi/4$ مع $\vec{P_1}$ أو $\vec{P_2}$.

ت.ع:

$$\left|\vec{P}\right| = 2,26.10^{-29}\ C.m$$

$$\approx 0,75\ D$$

ب. يتأثر الجزيء بوجوده داخل حقل $\vec{E}$ بعزم:

$$\vec{M} = \vec{P} \wedge \vec{E}$$

شدة العزم:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{P}\right|\left|\vec{E}\right| \sin\theta$$

يكون الثنائي في حالة توازن إذا كان $\vec{M} = \vec{0}$ أي:من أجل $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$

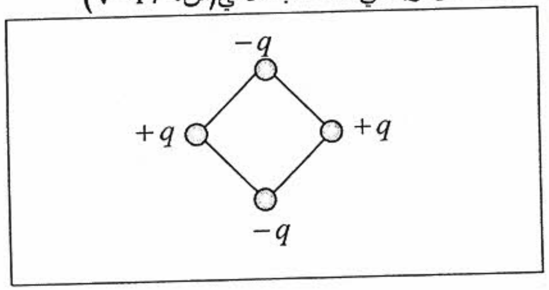
ت.ع:

$$\left|\vec{M}\right| = 2,26.10^{-29}\ .3.10^{2}\ \sin\theta$$

$$= 6,78.10^{-27}\ \sin\theta\ N.m$$

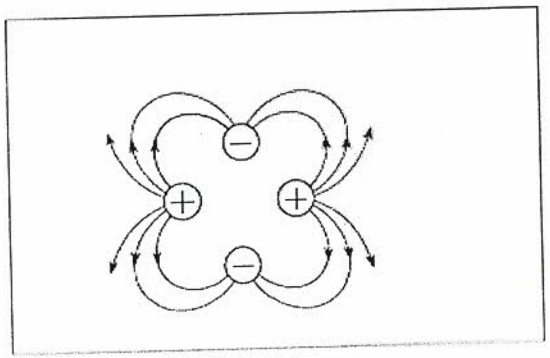
التمرين 04:

أرسم خطوط الحقل الناشئة عن رباعي الأقطاب الآتي(ش: V–17)



الحل

انطلاقا من خطوط الحقل لثنائي القطب، يمكن استنتاج خطوط الحقل لرباعي قطب كما يلي(ش: V–18):

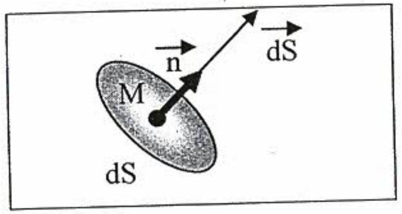


1.VI مقدمة

إيجاد الحقل الكهربائي بالطريقة المباشرة (الفصل III)، ليس سهلا، كما رأينا، إذ يتطلب إلمامًا واسعًا بعلم التكاملات ومعرفة كبيرة بمبادئ الهندسة المستوية والفضائية. سوف نتعرف في هذا الفصل على طريقة فعالة لحساب شدة الحقل الكهربائي في حالات عملية كثيرة، إنها طريقة قانون غوص، الذي يعتمد على مفهوم تدفق (فيض) الحقل الكهربائي من خلال سطح مغلق.

2.VI توجيه مساحة

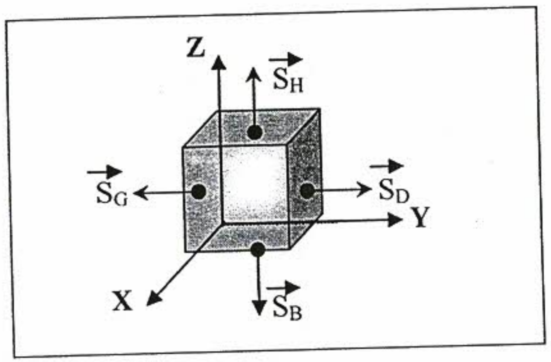
توجه المساحة بشعاع وحدة $\vec{n}$، يتصف بكونه (ش: VI-1):



- عموديا على السطح.
- واتجاهه إتجاه الخارج، حيث:

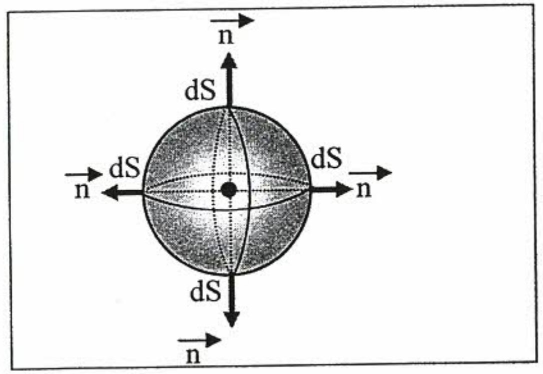
$$\vec{dS} = dS\,\vec{n} \quad [\text{م:VI-1}]$$

في حالة المكعب مثلا (ش: VI-2) وهو سطح مغلق.

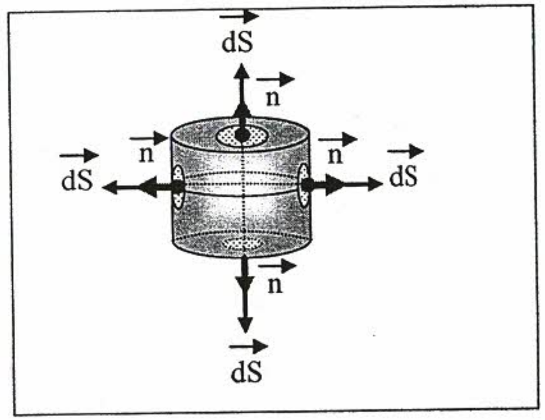


- المساحة العلوية (الوجه العلوي للمكعب): $\vec{S}_H = S_H\,\vec{k}$
- الوجه الأيمن: $\vec{S}_D = S_D\,\vec{j}$
- الوجه الأيسر: $\vec{S}_G = S_G(-\vec{j}) = -S_G\,\vec{j}$
- الوجه السفلي: $\vec{S}_B = S_B(-\vec{k}) = -S_B\,\vec{k}$
- الوجه الأمامي: $\vec{S}_F = S_F\,\vec{i}$

أما في حالة سطح مغلق منتظم كالكرة مثلا، شعاع وحدة المساحة $\vec{n}$ يكون دوما قطريا (ش: 3-VI).



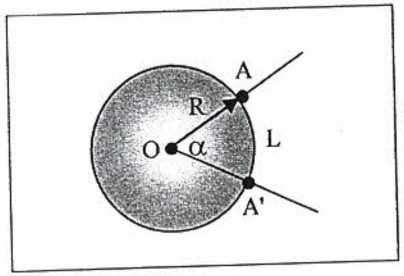
أما في حالة الأسطوانة (ش: 4-VI) فشعاع الوحدة $\vec{n}$ ، يكون قطريا بالنسبة للمساحة الجانبية، ومحمولا على المحور بالنسبة لمساحتي القاعدتين.



3-VI الزاوية الصلبة (المجسمة)

3-أ: مفهوم الزاوية الصلبة:

على عكس الزاوية الهندسية في المستوى (ش:5-VI) والتي تعرف على أنها النسبة بين طول القوس AA' الدائري ونصف القطر R .

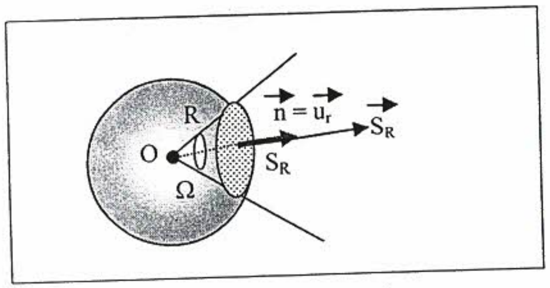


$$\alpha = \frac{AA'}{R} = \frac{L}{R}$$ [م: 2-VI]

نلاحظ:

الزاوية بدون بعد.

فإن الزاوية الصلبة Ω زاوية فضائية (ش: 6-VI) وتساوي إلى المساحة السطحية المشاهدة من مركز الكرة على مربع نصف قطر الكرة.



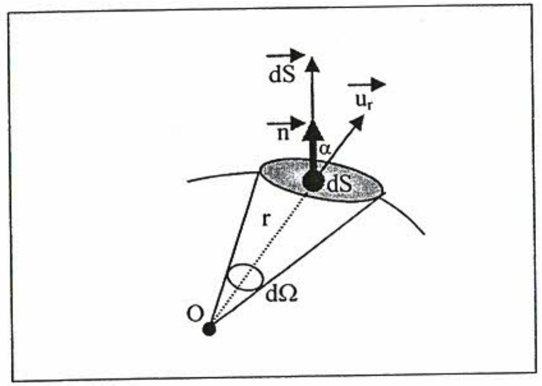
$$\Omega = \frac{S_R}{r^2}$$ [م: 3-VI]

نلاحظ كذلك أن الزاوية الصلبة بدون بعد.

3- ب: الزاوية الصلبة العنصرية:

تعطي الزاوية الصلبة العنصرية $d\Omega$، والتي نرى من خلالها انطلاقا من نقطة **0** المساحة العنصرية $d\Omega$ (ش:VI-7) بـــ:

$$d\Omega = \frac{\vec{dS}\cdot\vec{u_r}}{r^2} = \frac{dS\,\vec{n}}{r^2}\cdot\vec{u_r} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2} \qquad [\text{م:VI-4}]$$



و هي مقدار جبري بدون بعد وتقاس بالستيراديان. $[\Omega]=Strad$ و تساوي مركبة المساحة العنصرية وفق شعاع الوحدة القطري ($\vec{u_r}$) على مربع البعد.

ملاحظـــــات:

☜ في حالتي الكرة والسطح الجانبي للأسطوانة يكون ($\vec{n}\,//\,\vec{u_r}$)و منه تعطى الزاوية الصلبة العنصرية بـــ:

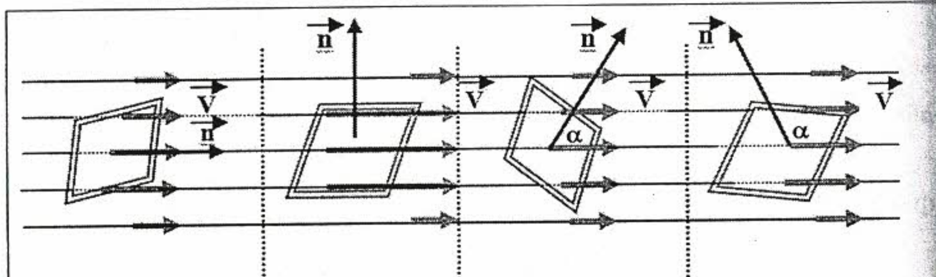
$$d\Omega = \frac{\vec{dS}\cdot\vec{u_r}}{r^2} = \frac{dS}{r^2} \qquad [\text{م: VI-5}]$$

VI .4 تدفق حقل شحنة نقطية

4- أ: مفهوم التدفق:

إن الحقول الاتجاهية أو الشعاعية (كالحقل الكهربائي مثلا)، توصف تخطيطيا في الفضاء بخطوط تبين توزيع شدة الحقل من الناحية الإتجاهية والكمية، فمقدار شدة الحقل في نقطة معينة في الفضاء يوصف بكثافة خطوط الحقل المخترقة عموديا لوحدة المساحة المحيطة بتلك النقطة. فالتدفق إذن يمثل عدد خطوط الحقل المخترقة لوحدة المساحة، يرمز للتدفق بـــ Φ.

لفهم معنى التدفق، نتخيل مجرى مائي مثلا، سرعة السائل به $\vec{V}\,(m/S)$ ، فالسرعة إذن تمثل حقلا شعاعيا، فإذا كانت $\vec{S}$ هي المساحة الموجهة بالمتر مربع لإطار غمر في المجرى المائي، فإن المقدار $\vec{V}\cdot\vec{S}$ يمثل معدل سريان الماء خلال ذلك الإطار بالمتر المكعب في الثانية (ش: VI -8).

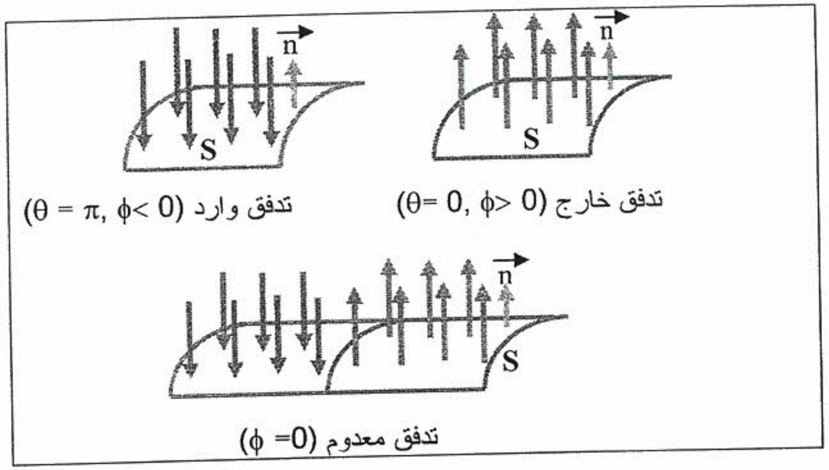


منفرجة $\alpha=(\vec{V},\vec{S})$	حادة $\alpha=(\vec{V},\vec{S})$	$\vec{V}\perp\vec{S}$	$\vec{V}\,//\,\vec{S}$
$\Phi = VS\cos\alpha < 0$	$\Phi = VS\cos\alpha > 0$	$\Phi = 0$	($\Phi = VS$ أعظمي)

ملاحظـــــات:

☜ هذا التعريف للتدفق ينطبق على أية دالة شعاعية، مهما كان المتغير الفيزيائي الذي تمثله هذه الدالة (حقل كهربائي، مغناطيسي، حزمة ضوئية، كتلة مادية، كمية حرارة...).

☜ التدفق مقدار سلمي، يمكن أن يكون سالبا أو معدوما أو موجبا وذلك حسب قيمة الزاوية المحصورة بين شعاعي الحقل والمساحة أو حسب مفهوم التدفق الوارد والتدفق الخارج (أي حسب إتجاه وشدة خطوط الحقل المخترقة لمساحة أو سطح ما) (ش: VI-9).



4-ب: تدفق حقل شحنة نقطية عبر سطح مفتوح:

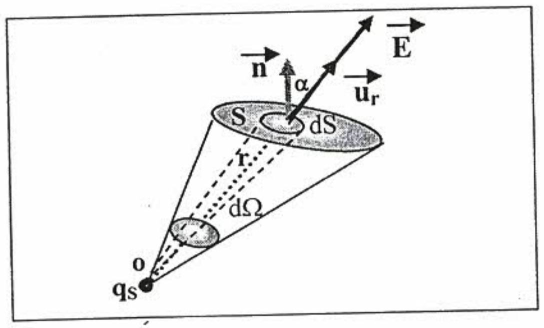
يعرف تدفق الحقل $\vec{E}$، الناشئ عن شحنة نقطية q_S موضوعة عند النقطة o، عبر المساحة المفتوحة S (ش: VI-.10) بـ:

- التدفق العنصري عبر السطح dS:

$$d\Phi = \vec{E}.\vec{dS} \qquad [\text{م}: V-7]$$

- التدفق عبر السطح dS:

$$\Phi = \oiint d\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} \qquad [\text{م}: V-8]$$



و منه التدفق الكلي:

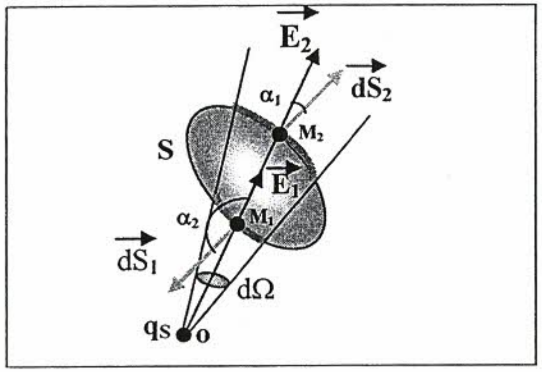
$$\Phi = \frac{q_S}{4\pi\varepsilon_0}\Omega \qquad [\text{م } VI-9]:$$

حيث Ω هي الزاوية الصلبة التي نرى من خلالها انطلاقا من O السطح S.

4-جـ: التدفق عبر سطح مغلق:

أ. الشحنة خارج السطح المغلق:

الزاوية الصلبة العنصرية $d\Omega$، تحصر مساحتين عنصريتين dS_1 و dS_2 من السطح المغلق S (ش: VI-11).



- التدفق عبر السطح العنصري ds_1 سالب فهو تدفق وارد أو داخل (الزاوية α_1 منفرجة).

$$d\Phi_1 = \vec{E_1}.\vec{dS_1} = \frac{q_S}{4\pi\varepsilon_0}(-d\Omega) \qquad [\text{م } VI-10]:$$

- عبر السطح ds_2، التدفق موجب (تدفق خارج)، لأن الزاوية α_2 حادة.

$$d\Phi_2 = \vec{E_2}.\vec{dS_2} = \frac{q_s}{4\pi\varepsilon_0}(+d\Omega) \qquad [\text{م } VI-11]:$$

- التدفق الكلي عبر السطح المغلق S:

$$d\Phi_T = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0 \qquad [\text{م}: VI-12]$$

أي أن عدد خطوط الحقل الواردة عند السطح العنصري ds_1 يساوي عدد خطوط الحقل الخارجة عند السطح العنصري ds_2 وهذا يترجم مبدأ إنحفاظية أو مصونية التدفق.

(التدفق الخارج) $|d\Phi_1| = |d\Phi_2|$ (التدفق الوارد).

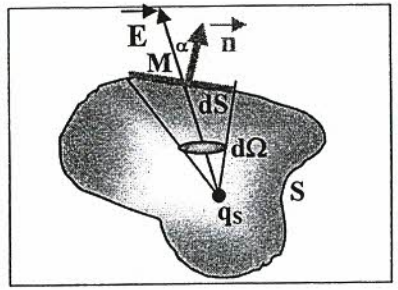
و **بالنتيجة**: تدفق الحقل الناشئ عن شحنة نقطية واقعة خارج السطح المغلق معدوما.

ب. الشحنة داخل السطح المغلق:

لتكن الشحنة النقطية، مصدر الحقل q_S، داخل السطح المغلق S (ش: VI-12). التدفق الكلي لخطوط الحقل الكهربائي الناشئ عن هذه الشحنة والمخترق للسطح S يعطى بـــ:

$$\Phi = \oiint_S d\phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

$$= \frac{q_S}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_S d\Omega \qquad \text{[م: VI-13]}$$

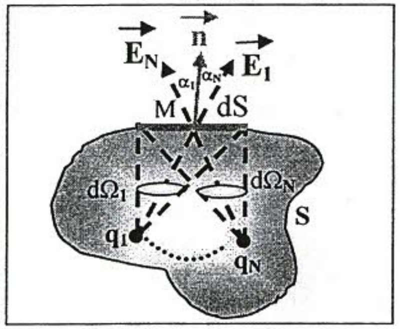


و بما أن الزاوية الصلبة التي تغطي الفضاء كله حول الشحنة q_S، مهما كان شكل السطح المغلق تساوي 4π فإن:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q_s}{\varepsilon_0} \qquad \text{[م: VI-14]}$$

5.VI تدفق الحقل الناشئ عن مجموعة من الشحن النقطية واقعة داخل سطح مغلق S

لتكن مجموعة من الشحن النقطية: $q_1, q_2, ... q_N$ واقعة داخل سطح مغلق S (ش: VI-13).



التدفق الكلي عبر السطح S.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

حيث $\vec{E}$ الحقل الكلي، ويعطى حسب مبدأ التراكب بـــ:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_N$$

إذن التدفق:

$$\Phi = \oiint(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ... \vec{E}_N) d\vec{S}$$

$$= \oiint \vec{E}_1 . d\vec{S} + \oiint \vec{E}_2 . d\vec{S} + ... \oiint \vec{E}_N . d\vec{S}$$

$$= \Phi_1 + \Phi_2 + ... \Phi_N$$

حسب المعادلة [م: VI-13]، فإن:

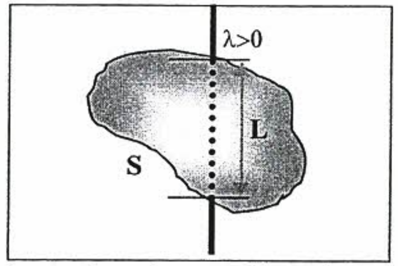
$$\Phi = \oiint \vec{E} . d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + ... \frac{q_N}{\varepsilon_0} \qquad \text{[م: VI-15]}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

6.VI التدفق الناشئ عن توزيع مستمر

ليكن سلكا عازلا لا نهائيا مشحونا بكثافة شحنية طولية $(\lambda > 0)$، يخترق سطحا مغلقا S (ش: VI-14). لحساب التدفق عبر هذا السطح يستبدل المجموع في المعادلة [م: VI-15] بالتكامل على قيمة الشحنة المحتواة داخل السطح المغلق.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^L \lambda dl \qquad [\text{VI-16 :م}]$$



و بصفة عامة، إذا كان داخل السطح المغلق، توزيعا شحنيا مستمرا، فإن المجموع في المعادلة [م: VI-15] يتحول إلى تكامل حسب طبيعة التوزيع المستمر:

➢ إذا كان داخل السطح المغلق توزيعا شحنيا سطحيا فإن:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oiint_S \sigma dS \qquad [\text{VI-17 :م}]$$

➢ إذا كان داخل السطح المغلق توزيعا شحنيا حجميا فإن:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho dV \qquad [\text{VI-18 :م}]$$

7.VI نظرية غوص

الفراغ، تدفق الحقل الناشئ عن توزيع شحني والخارج من سطح مغلق **S** يساوي النسبة بين
دار الشحنة داخل هذا السطح وسماحية الفراغ ε_0 .

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

ملاحظـــات:

- السطح المغلق S يسمى سطح قوص، وهو سطح اختياري ومحدد، يسمح بحساب شدة الحقل الكهربائي، انطلاقا من تعريف التدفق بسهولة.
- إذا كانت الشحنات موجودة في وسط سماحيته المطلقة ε، فإننا نعوض في قانون غوص ε_0 بـ ε .

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon} \qquad [\text{VI-19 :م}]$$

- يمكن التعبير عن قانون غوص بدلالة شعاع الإزاحة $\vec{D}$ بدلا من شعاع الحقل

$$\Phi = \oiint_S \vec{D}.d\vec{S} = \sum_i q_i \qquad [\text{VI-20 :م}]$$

- إذا لم توجد شحنات داخل سطح غوص (السطح المغلق) أو المجموع الجبري للشحنات داخل هذا السطح معدوما، فإن التدفق يكون معدوما كذلك.

8.VI حساب الحقل بواسطة نظرية غوص

نظرية غوص عبارة عن وسيلة فعالة وسريعة لحساب الحقل الكهروستاتيكي في الجمل المتناظرة، ولتطبيقها نتبع الخطوات الآتية:

أ. تحديد شكل الحقل، حسب طبيعة تناظر الجملة (أنظر الجدول: ج:VI-1).

ب. تشكيل سطح غوص المتناظر حول التوزيع الشحني، بطريقة تسمح بحساب التدفق بسهولة ويسر (أنظر الجدول: ج: VI-1).

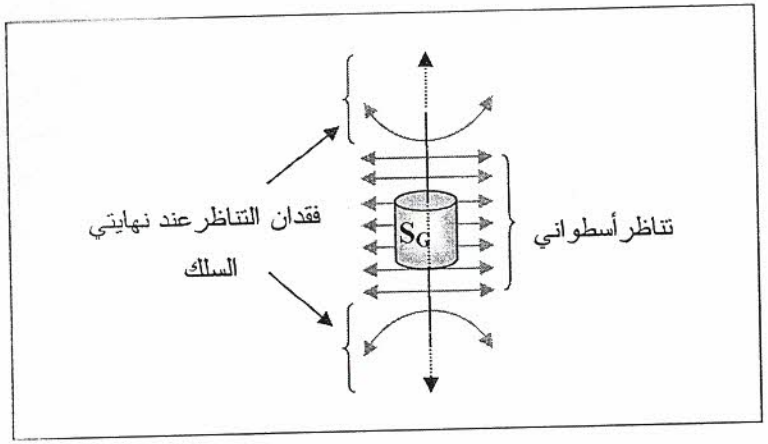
ج. تطبيق نظرية غوص وانتهاءا بتحديد شدة الحقل.

ملاحظـــات:

- انطلاقا من العلاقة الاتجاهية بين شعاع الحقل وشعاع المساحة، يمكن تحديد الحالات الخاصة الآتية:
  - إذا كان الحقل عموديا على السطح في كل نقطة $(\vec{E}\perp d\vec{S})$ فإن: $\Phi = 0$.
  - إذا كان الحقل موازيا للسطح $(\vec{E}\,//\,d\vec{S})$ فإن:

$$\Phi = \oiint_S E dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

  - إذا كان الحقل منتظما $(|\vec{E}| = cte)$ فإن: $\Phi = ES$
- يتم اختيار سطح غوص على أساس تناظر شدة الحقل الكهربائي [ج: VI-1]:
  - إذا كان التناظر مركزيا أو كرويا، نختار سطح غوص كرة.
  - أما إذا كان التناظر محوريا أو مرآتيا، نختار سطح غوص أسطوانة.
- إذا لم تكن شدة الحقل الكهربائي متناظرة (أي الجسم المشحون غير منتظم من الناحية الهندسية مثلا)، فإنه من الناحية النظرية، يمكن تطبيق نظرية غوص، إذا كانت شروط تطبيقها متوفرة (سطح مغلق بداخله شحنة)، لكن الصعوبة تكمن في الجانب الرياضي، إذ لا يمكن إيجاد شدة الحقل بالطرق التحليلية اليديوة بينما دوما يمكن إيجاد التدفق.
- في قانون غوص، التكامل في الطرف الأول، يكون على سطح غوص المختار، والطرف الثاني، يمثل مقدار الشحنة المحتواة داخل سطح غوص.
- فعل الحواف: هل يمكن تطبيق نظرية غوص مثلا على سلك طوله l منته؟ خطوط الحقل الناشئ عن السلك المحدود تكون كما يلي: (ش: VI-15). كلما اقتربنا من نهايتي السلك يزداد انحناء خطوط الحقل، وتصبح غير مستقيمة، لذلك يمكن تطبيق نظرية غوص في النقاط البعيدة عن حافتي السلك فقط، أي في النقاط التي تكون فيها خطوط الحقل مستقيمة قطرية ومتناظرة، وعبارة الحقل عند هذه النقاط، تأخذ نفس عبارة الحقل للسلك اللانهائي. نفس الملاحظات بالنسبة لسطح محدود أو أسطوانة محدودة.



VI.9 العلاقات التفاضلية والتكاملية للحقل والكمون

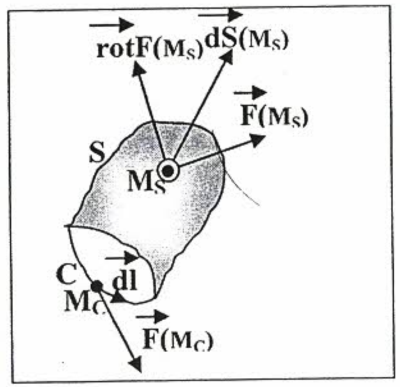
يمكن تحويل تكاملات خطية إلى ثنائية وتكاملات ثنائية إلى ثلاثية، وذلك حسب النظريات الآتية:

9.1: نظرية ستوكس أو نظرية الدوران وعلاقة الحقل بالكمون:

السطح S المفتوح يرتكز على المنحنى المغلق C (ش: VI-16).M_c نقطة من المنحنى المغلق C، M_s نقطة من السطح المفتوح S.

تنص النظرية على أن: "تجوال الحقل $\vec{F}$ عبر المنحنى المغلق C يساوي إلى تدفق الحقل الشعاعي $\vec{rot}\,\vec{F}(M)$ عبر السطح المفتوح S المرتكز على المنحنى C.

$$\zeta = \oint_{(C)} \vec{F}.\vec{dl} = \iint_{(S)} \vec{rot}\,\vec{F}.d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{\nabla}\wedge\vec{F}.d\vec{S} \qquad \text{[م: VI-21]}$$



و بما أن تجوال الحقل الكهربائي $\vec{E}$ عبر مسار مغلق C معدوما فإنه من نظرية ستوكس:

$$\zeta = \oint_{C} \vec{F}.\vec{dl} = 0 \Leftrightarrow \vec{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0} \qquad \text{[م: VI-22]}$$

و بما أنه يمكن البرهان على أن:

$$\vec{rot}(\vec{grad}V) = \vec{0} \qquad \text{[م: VI-23]}$$

فإن:

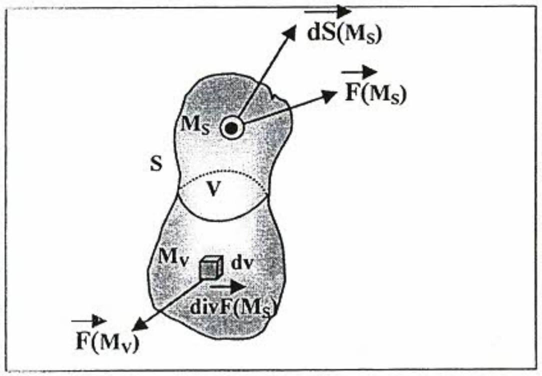
$$\vec{E} = -\vec{grad}V \qquad \text{[م: VI-24]}$$

و هي علاقة تفاضلية تدرجية تربط الحقل و الكمون.

9.2 نظرية غرين – أوستوغرادسكي أو نظرية التفرق ومعادلات بواسون ولابلاس

السطح المغلق S يحدد حجما V (ش: VI-17)، M_s نقطة من السطح المغلق S، M_v نقطة من الحجم V. تستند النظرية إلى ربط علاقة تدفق الحقل المخترق للسطح المغلق، بتفرق شعاع ذلك الحقل.

نص النظرية: "تدفق الحقل الشعاعي $\vec{F}(M)$ عبر سطح مغلق كيفي S يساوي إلى التكامل الثلاثي للحقل السلمي ($\text{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F}$) على الحجم V بكامله"



$$\Phi = \oiint_{S} \vec{F}.\vec{dS} = \iiint_{V} \text{div}\,\vec{F}(M_V)\,dV = \iiint_{V} \vec{\nabla}.\vec{F}(M_V)\,dV \qquad \text{[م: VI-25]}$$

من نظرية غوص [م: VI-17]، أي سطح غوص المغلق والذي يحدد حجما، يضم شحنة تتوزع بانتظام بكثافة شحنية حجمية ρ، ومن نظرية التفرق [م: VI-24] يمكن إيجاد الشكل التفاضلي لقانون غوص:

$$\Phi = \oint_{C} \vec{E}.\vec{dS} = \iiint_{V} \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) dV = \iiint_{V} (\vec{\nabla}.\vec{E})\,dV$$

بالمقارنة نجد:

$$div\,\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad [\text{م: VI-26}]$$

و هو الشكل التفاضلي لقانون غوص، ويسمى كذلك قانون غوص – ماكسويل.

ملاحظـــات:

معادلة بواسون.

من المعادلتين [م: VI-24] و[م: VI-26] نجد:

$$div\,\vec{E} = div(-\vec{grad}\,V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}V) = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = (\Delta V) = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

حيث $\nabla^2 = \Delta$ هو مؤثر لابلاس.

و منه نجد معادلة بواسون:

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad [\text{م: VI-27}]$$

معادلة لابلاس.

الحالة الخاصة التي تكون فيها منطقة الفضاء خالية من أية شحنة $\rho = 0$، فإن العلاقتين [م: VI-25] و[م: VI-26] تصبحان كما يلي:

$$[\text{م: V-25}] \Rightarrow div\vec{E} = 0 \Rightarrow \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = 0$$

أي أن التدفق محافظ:

$$[\text{م: VI-26}] \Rightarrow \Delta V = 0 \qquad [\text{م: VI-28}]$$

هذه العلاقة الأخيرة، تسمى معادلة لابلاس.

ملخص

العلاقات الأساسية (التكاملية والتفاضلية) للحقل في الفراغ (جـ: VI-2):

	العلاقات التكاملية للحقل $\vec{E}$	العلاقات التفاضلية للحقل $\vec{E}$	العلاقات التفاضلية للكمون V
الحقل مشتق من كمون V	$\zeta = \oint \vec{E}.\vec{dl} = 0$ مغلق	$\vec{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{E} = -\vec{grad}V$
الحقل يخضع لنظرية غوص	تدفق $\vec{E}$ عبر سطح مغلق $\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	(قانون غوص-ماكسويل) $div\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$div(-\vec{grad}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (معادلة $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ بواسون) إذا كانت $\rho = 0$ فإن $\Delta V = 0$ (معادلة لابلاس)

حساب الحقل الكهربائي: يمكن حساب الحقل بطرق عديدة، حسب معطيات المسألة:

أ. **الحساب المباشر:** بتطبيق مبدأ التراكب (المجموع أو التكامل)، وذلك حسب طبيعة الجملة (مجموعة من الشحن النقطية، توزيع مستمر طولي أو سطحي أو حجمي):

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_R \frac{dq}{r^2}\vec{u}_r$$

في حالات عديدة، وبدواعي التناظر، تنعدم بعض مركبات الحقل، نجد في هذه الحالة المركبة الفعالة فقط **علاقات الانتقال عبر سطح S:** بمكاملة الحقل العنصري الناشئ عن شحنة عنصرية dq.

ب. **بمعرفة قانون الكثافة الشحنية الحجمية ρ(M):** يمكن تطبيق علاقة غوص–ماكسويل التفاضلية [م: VI-25].

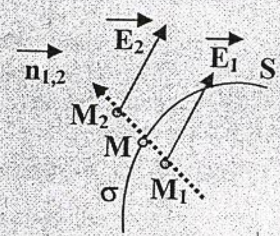
$$div\,\vec{E}(M)=\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

ج. **إذا كان الكمون V(M) معروفا:** يمكن تطبيق العلاقة التفاضلية التدرجية [م: VI-23] $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V$ بشرط انعدام الشحنة في الما لانهاية.

د. **نظرية غوص:** باختيار لائق لسطح غوص المغلق حسب تناظر الجملة، يمكن حساب الحقل $\vec{E}$ انطلاقا من حساب تدفقه عبر سطح غوص [م: VI-18].

$$\Phi=\oiint\vec{E}\cdot\vec{dS}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

هـ. باختراق سطح S مشحون بكثافة شحنية σ، ومن أجل نقطتين متجاورتين على جهتي الوجه المشحون (ش: VI-18):



حيث $\vec{n}_{1\text{-}2}$: شعاع الوحدة الناظمي على السطح والمتجه من M_1 إلى M_2.

☜ **حساب الكمون الكهربائي:** يمكن حساب الكمون بطرق عديدة حسب معطيات المسألة:

أ. **الحساب المباشر:** بتطبيق مبدأ التراكب (التكامل) حسب طبيعة الجملة:

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_R\frac{dq}{r^2}$$

ب. **بمعرفة قانون الكثافة الشحنية الحجمية ρ(M):** بتطبيق علاقة بواسون [م: VI-26]، حيث:

$$\Delta V(M)+\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}=0$$

$$\Delta=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}$$

في حالة انعدام الشحنة بمنطقة الفضاء (ρ=0)، نجد علاقة لابلاس $\Delta V=\nabla^2V=0$.

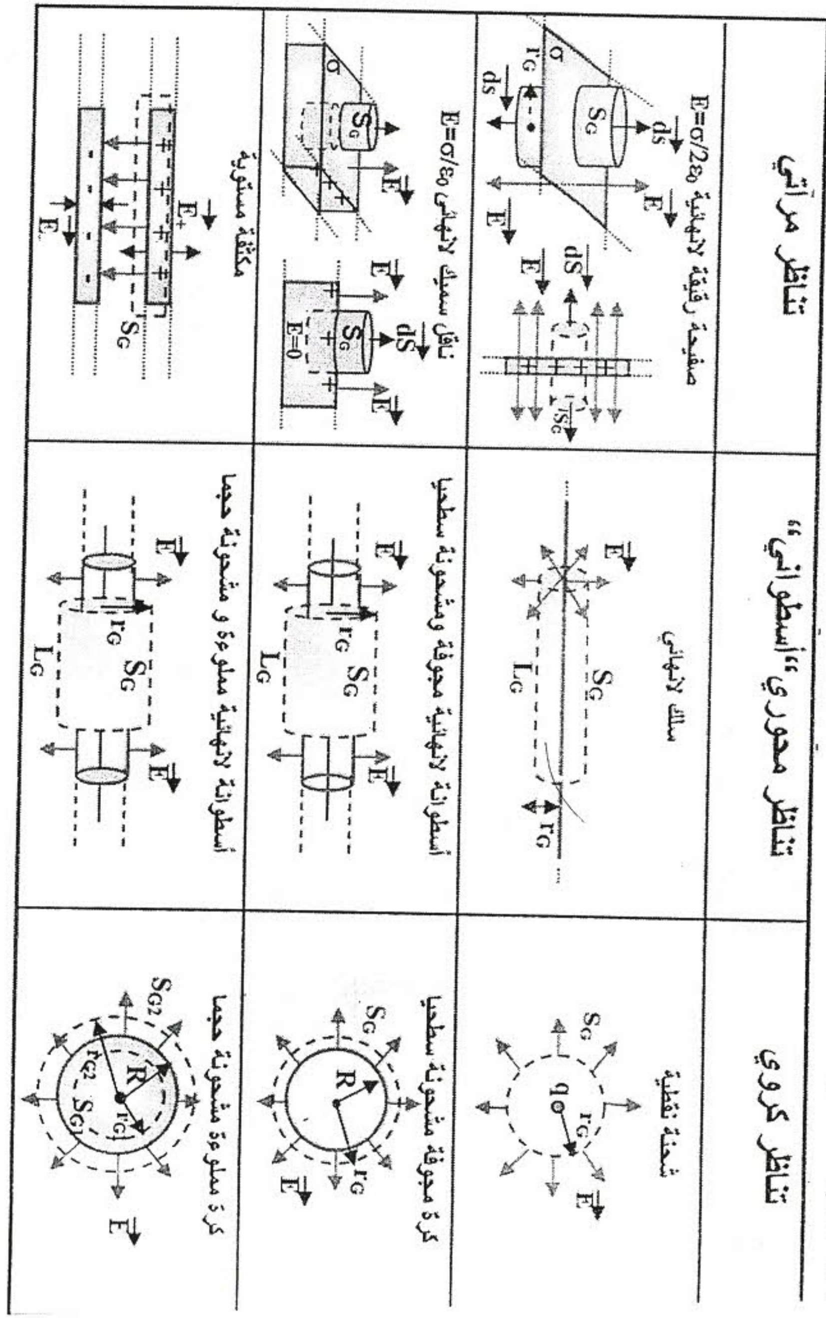
ج. **إذا كانت عبارة الحقل $\vec{E}(M)$ معروفة:** تجوال الحقل يساوي النقص(الانخفاض) في الكمون.

$$V(M)=-\int\vec{E}(M)\cdot\vec{dl}$$

أو من العلاقة التفاضلية التدرجية [م: VI-23]

د. **استمرارية الكمون عند اختراق سطح S مشحون:** وهي نتيجة لاستمرارية المركبة المماسية للحقل $V(M_2)-V(M_1)=0$.

ج: 1-VI): التناظرات المختلفة للحقل الكهربائي و سطوح غوص المكافئة



تناظر مراتي	تناظر محوري"أسطواني"	تناظر كروي
صفيحة رقيقة لانهائية $E=\sigma/2\varepsilon_0$	سلك لانهائي	شحنة نقطية
ناقل سميك لانهائي $E=\sigma/\varepsilon_0$	أسطوانة لانهائية مجوفة ومشحونة سطحيا	كرة مجوفة مشحونة سطحيا
مكثفة مستوية	أسطوانة لانهائية مملوءة و مشحونة حجما	كرة مملوءة مشحونة حجما

تمارين محلولة

التمرين 01

جد الزاوية الصلبة التي نرى من خلالها الفضاء كله، ثم استنتج الزاوية الصلبة التي نوى من خلالها انطلاقا من نقطة **0**، نصف الفضاء.

الحل

أ. الفضاء حول النقطة **0** فضاء كروي، ومن العلاقة [م: 5-VI]

$$d\Omega=\frac{dS}{r^2}=\frac{r^2 Sin\,\theta d\theta dl}{r^2}=Sin\,\theta d\theta d\varphi$$

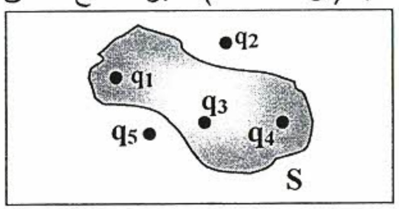
$$\Omega=\iint_{(S)} d\Omega=\int_0^{\pi} Sin\,\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi=4\pi str$$

ب. الزاوية الصلبة المكافئة لنصف الفضاء:

$$\Omega'=\frac{\Omega}{2}=\int_0^{\pi/2} Sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi=2\pi str$$

التمرين 02

جد تدفق الشحنات النقطية الآتية (ش: 18-VI)، عبر السطح المغلق **S**.



الحل

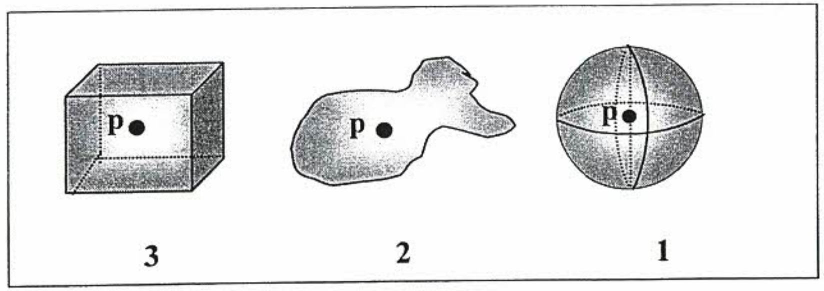
$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4+\Phi_5$$

$$=\sum_{i=1}^{5}\Phi_i$$

$$=\frac{q_1}{\varepsilon_0}+0+\frac{q_3}{\varepsilon_0}+\frac{q_4}{\varepsilon_0}+0=\frac{q_1+q_3+q_4}{\varepsilon_0}\left[\frac{Nm^2}{C}\right]$$

التمرين 03:

قارن بين تدفق الحقل الناشئ عن بروتون عبر السطوح المغلقة الآتية (ش: VI-19). ثم حدد الحالات التي فيها يمكن حساب الحقل بسهولة، إذا كان البروتون يقع في مركز السطح المغلق.



الحــل

1. حسب قانون غوص التدفق: $\Phi = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$

التدفق لا يعتمد على شكل السطح المغلق، ومنه التدفق نفسه في الحالات الثلاث:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \frac{+E}{\varepsilon_0}$$

2. يمكن حساب الحقل بسهولة كبيرة في حالة السطح الكروي 3، وسهولة نسبية في حالة المكعب 1، ولا يمكن حساب الحقل عبر السطح 2 غير المنتظم بالطرق التحليلية اليدوية.

التمرين 04:

يعرف حيزا كرويا بـ: $r = 4m, \theta = \dfrac{\pi}{2}, \varphi = \pi$

أ. ما ذا يمثل هذا الحيز؟

ب. تعطى شدة الحقل الكهربائي الناشئة عن توزيع كروي بـ: $\vec{E} = \dfrac{5}{4\varepsilon_0} r^2 \vec{u_r}$

جد الشحنة الكلية المحتواة داخل الحيز السابق

الحــل

أ. الحيز السابق عبارة عن ربع كرة نصف قطرها $r = 4m$

ب. من نظرية غوص:

$$\Phi = \oiint_{SG} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_{SG} EdS = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow q = \varepsilon_0 \oiint_{SG} EdS$$

$$q = \frac{5}{4} r^2 r^2 \iint \sin\theta d\theta d\phi = \frac{5}{4} r^4 \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{\pi} d\phi = \frac{5\pi}{4} r^4$$

التمرين 05:

باستعمال نظرية غوص، جد الحقل الكهروستاتسكي عند مختلف نقاط الفضاء في الحالات الآتية:

1. شحنة نقطية q.
2. سلك لا نهائي مشحون بكثافة شحنية خطية $(\lambda < 0)$.
3. أسطوانة لا نهائية (σ, R) مشحونة بكثافة شحنية منتظمة σ، نصف قطرها R.
4. كرة مشحونة (σ, R)، بكثافة شحنية سطحية منتظمة σ، نصف قطرها R.
5. سطح لا نهائي مشحون بكثافة شحنية سطحية منتظمةσ.

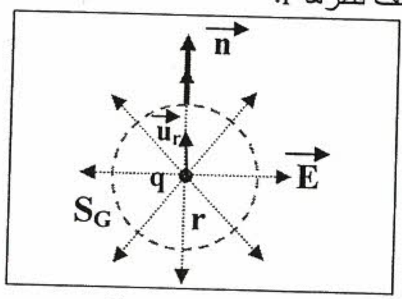
ملاحظة:

لا يمكن تحليليا تطبيق نظرية غوص في حالة تركيب توزيعات شحنية ذات تناظرات مختلفة، إذ يمكن حساب التدفق دون الحقل.

6. أسطوانة لا نهائية (σ, R) ومحورها سلك لا نهائي λ.
7. كرة مشحونة (σ, R) وفي مركزها شحنة نقطية q.

الحــل

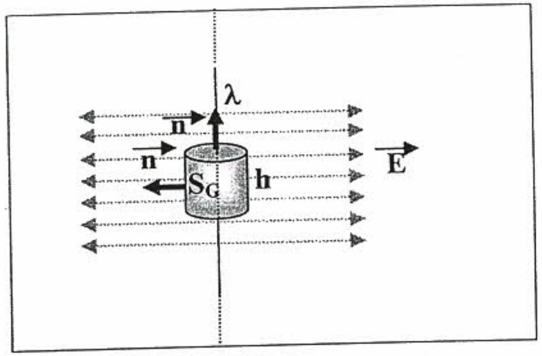
1. شحنة نقطية: تناظر شدة الحقل الكهربائي، تناظر مركزي، ومنه سطح غوص عبارة عن كرة (ش: VI-20) نصف قطرها r.



$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (\vec{E}//\vec{dS}, \vec{u_r}//\vec{n})$$

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\cdot\vec{dS} = E.4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u_r}$$

2. سلك لا نهائي مشحون: تناظر شدة الحقل، تناظر محوري (أسطواني)، ومنه سطح غوص، عبارة عن أسطوانة (نق r) وارتفاعها L (ش: VI-21).



➢ تدفق الحقل عبر مساحتي القاعدتين معدوما $(\vec{E} \perp \vec{dS})$، $(\vec{u_r} \perp \vec{n})$.

➢ يبقى فقط التدفق المخترق للمساحة الجانبية $(\vec{E} // \vec{dS})$، $(\vec{u_r} \equiv \vec{n})$.

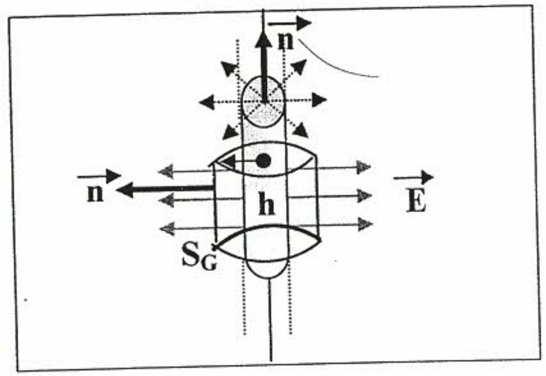
$$\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \int_0^h dl$$

$$= \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E.2\pi r.h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u_r}$$

3. أسطوانة لانهائية (σ, R): تناظر $\vec{E}$ تناظر أسطواني، فسطح غوص أسطوانة نق، r وارتفاعها h (ش: VI-22).

➢ لا توجد شحنة داخل الأسطوانة وبالتالي الحقل معدوما. $(r < R, \vec{E} = \vec{0})$

➢ لما $r < R$:



$$\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint \sigma dS$$

التدفق المخترق لمساحتي القاعدتين معدوم، لأن $(\vec{E} \perp \vec{dS})$.

➢ يبقى فقط التدفق المخترق للمساحة الجانبية $(\vec{ur} // \vec{n})$.

$$\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \iint_{S_G} dS$$

$$\Rightarrow E.2\pi r.h = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.2\pi R.h$$

و منه:

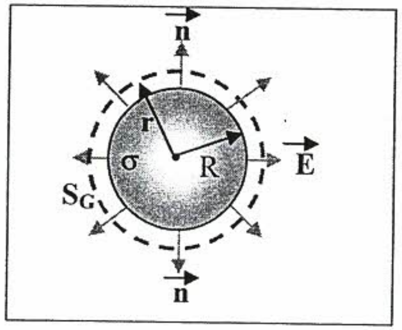
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)\vec{u_r}$$

4. كرة مشحونة (σ, R): تناظر شدة الحقل تناظر كروي، ومنه سطح غوص عبارة عن كرة نق، r (ش: VI-23).

الحقل قطري $\vec{E} = E\vec{u_r}$ وهو منطبق على $\vec{n}$ $(\vec{u_r} // \vec{n})$

$$\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \iint_{S_G} dS$$

$$\Phi = E.4\pi r^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.4\pi R$$



إما: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\frac{R}{r})^2 \vec{ur}$ أو: $E.4\pi r^2 = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

أي: $\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{ur}$

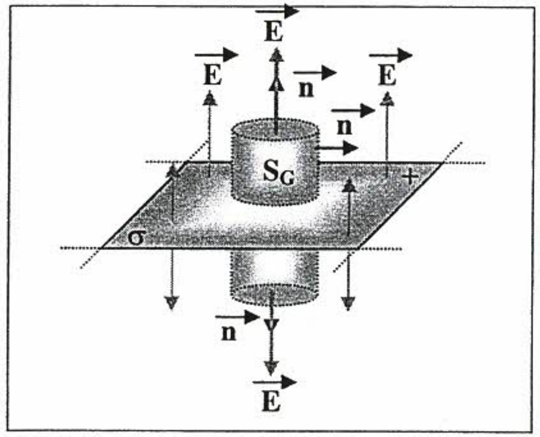
أي وكأن الحقل الناشئ عن كرة مشحونة بكثافة شحنية سطحية منتظمة σ يساوي الحقل الناشئ عن شحنة نقطية $q=\sigma S$ مركزة في مركزها.

5. سطح لا نهائي مشحون: تناظر الحقل، تناظر مرآتي، فسطح غوص عبارة عن أسطوانة **(r, L)**

(ش: VI-24).

التدفق المخترق للمساحة الجانبية معدوما $(\vec{E}\perp\vec{n})$.

يبقى تدفق الحقل عبر مساحتي القاعدتين.



$$\Phi=\oint\!\!\oint_{S_G}\vec{E}\cdot\vec{dS}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iint\sigma dS$$

$$=E.\pi r^2+E\pi r^2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\pi r^2$$

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

6. أسطوانة لانهائية (σ,R) وسلك لا نهائي λ (ش: VI-25): تناظر الحقل أسطواني، ومنه سطح غوص أسطوانات: لدينا منطقتين مختلفتين من الفضاء.

أ. **r<R**: الحقل يكون ناشئا عن سلك لا نهائي (الحالة 2):

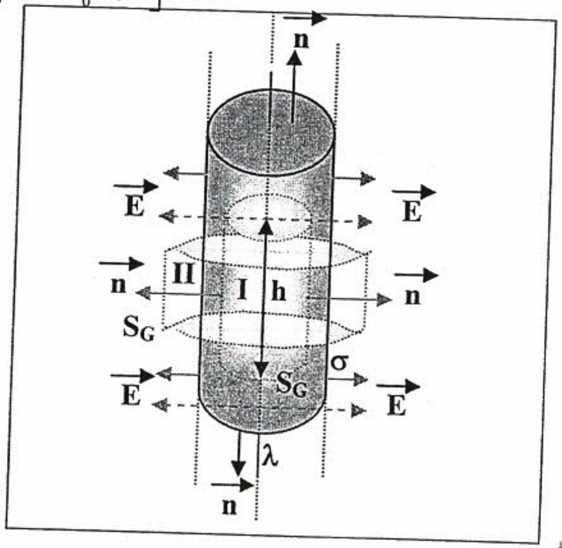
$$\vec{E_1}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{ur}$$

ب. **r>R**: سطح غوص يضم توزيعين مختلفين: سلكي وسطحي والتدفق عبر مساحتي القاعدتين معدوما.

$$\Phi=\oint\!\!\oint_{S_G}E_2 dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\lambda\int_0^h dl+\sigma\iint_{S_R}dS\right]$$

$$E_2.2\pi rh=\left[\frac{\lambda}{\varepsilon_0}h+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}2\pi R.h\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E_2}=\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}h+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)\right]\vec{ur}$$



نلاحظ:

تحقيق مبدأ التراكب: الحقل الناشئ عن الأسطوانة اللانهائية + الحقل الناشئ عن السلك اللانهائي.

ملاحظة:

عندما $r\to R_-$:

$$\vec{E_-}=\vec{E_1}(r\to R)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{ur}$$

عندما $r\to R_+$:

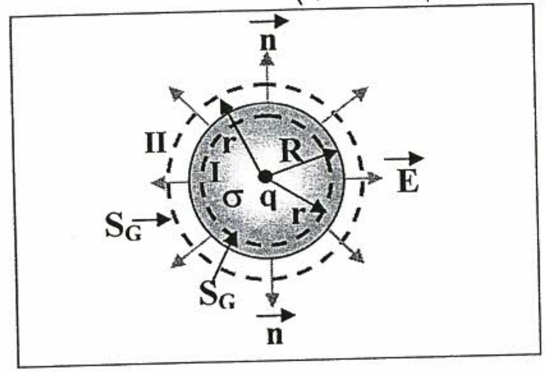
$$\vec{E_+}=\vec{E_2}(r\to R)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{ur}+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{ur}$$

و نستنتج عدم استمرارية الحقل عند سطح الأسطوانة بالمقدار:

$$\left|\Delta \vec{E}\right| = \left|\vec{E_+}\right| - \left|\vec{E_-}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

7. كرة (σ, R) بمركزها شحنة نقطية **q**: تناظر شدة الحقل كروي، ومنه سطوح غوص عبارة عن كرات: لدينا منطقتين من الفضاء (ش: VI-26).

أ. r <R: (سطح غوص يضم شحنة نقطية).



$$\vec{E_1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{ur}$$

ب. r >R: سطح غوص يضم توزيعين مختلفين: نقطي وسطحي، حسب مبدأ التراكب:

$$\vec{E_2} = \left[\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}h + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\frac{R}{r})^2\right]\vec{ur}$$

كذلك مقدار عدم استمرارية الحقل عند سطح الكرة

$$\left|\vec{E}_2(r \to R)\right| - \left|\vec{E}_1(r \to R)\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

التمرين 06:

أستنتج الكمون الكهروستاتيكي في الحالات الآتية:

أ. الناشئ عن سلك لانهائي مشحون بكثافة شحنية خطية منتظمة $(\lambda > 0)$، حيث الكمون الصفري عند $r = r_0$.

ب. الناشئ عن سطح لانهائي مشحون بكثافة شحنية سطحية منتظمة $\sigma > 0$، حيث الكمون الصفري على سطحه.

ج. الناشئ عن أسطوانة لا نهائية نصف قطرها R، ومشحونة بكثافة شحنية سطحية $\sigma > 0$

منتظمة، حيث الكمون الصفري عند $\sigma = \sigma_0$.

الحل

من نتائج التمرين السابق (ت-5):

أ. الحقل الناشئ عن سلك لانهائي:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{ur}$$

من دواعي التناظر (الأسطواني)، الكمون يعتمد فقط على **r**، منه:

$$\vec{E} = -\vec{grad}V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -Edr$$

$$V = \int dV = -\int Edr = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C$$

و من الشروط الحدية:

$$V(r \to r_0) = 0 \Rightarrow C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0$$

و منه الكمون:

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln {r_0}/{r}$$

ب. الحقل الناشئ عن مستوي لانهائي:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

$$V = \int dV = -\int Edz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + C$$

و منه الكمون:

$$V(z \to 0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$$

ج. الحقل الناشئ عن أسطوانة لا نهائية:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\frac{R}{r})\vec{u_r}$$

$$V = \int dV = -\int Edr = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln r + c$$

$$V(r \to r_0) = 0 \Rightarrow c = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln r_0$$

و منه الكمون:

$$V(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln({r_0}/{r})$$

1.VII مقدمة

الموصلات "أوالنواقل" هي مواد لها القابلية على تحريك الشحنات الكهربائية الحرة الموجودة فيها، وإذا ما شحنت بشحنة ما في جزء معين فإن الشحنة تتوزع على بقية الأجزاء، وللتوصيل الكهربائي (إنتقال الشحنات) شروطا يجب تحقيقها، منها:

- توفر الشحنات الكهربائية الحرة في تلك المادة.
- وقابلية تلك الشحنات على الحركة.

تتفاوت المواد من حيث توصيلها للكهرباء، وهذا يعود إلى إختلاف تركيبها الذري والبلوري. بصفة عامة الموصلات أو النواقل هي المواد المعدنية (ذهب، نحاس، حديد، ألمنيوم...). نمتحن في هذا الفصل القوانين والنظريات التي درسناها في الفصول السابقة، في حالة المواد الناقلة.

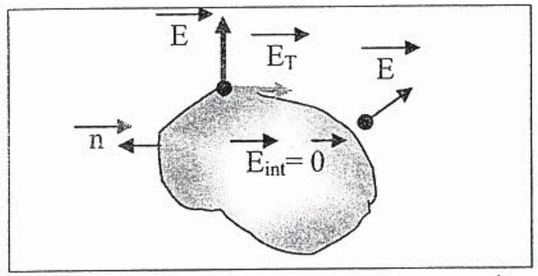
2.VII الناقل في حالة توازن كهربائي

حاملات الشحنة الكهربائية في النواقل (الإلكترونات) لها إمكانية الإنتقال والحركة تحت تأثير قوة خارجية صغيرة جدا، أي عند شحن الناقل في منطقة ما، فإن هذه الشحنة ما تلبث أن تنتشر عبره وخلال زمن قصير جدا، ثم تأخذ وضع التوازن. نقول عن ناقل أنه في حالة توازن كهروستاتيكي، إذا كانت الشحنات بداخله ساكنة، أي غير خاضعة لأية قوة.

3.VII خواص النواقل في حالة التوازن الكهربائي

3.أ: إنعدام الحقل داخل الناقل ($E_{int}=0$):

شعاع الحقل يكون بالضرورة معدوما داخل الناقل، وإلا خضعت الشحنات الحرة لقوة كهروستاتيكية ($\vec{F}=q\,\vec{E}$) تكسبها حركة وانتقالا، ويفقد عندها توازن الناقل. ولنفس السبب، فإن الحقل على سطح الناقل يجب أن يكون عموديا على هذا السطح (ش: 1- VII)، لأنه لو وجدت مركبة مماسية للسطح، فإن الشحنات السطحية الحرة سوف تنتقل على سطح الناقل تحت تأثير المركبة المماسية للقوة الناشئة ($\vec{F_T}=q\,\vec{E_T}$) ويفقد التوازن عندئذ كذلك. إذن:



➢ داخل الناقل: $\vec{E}_{int}=\vec{0}$

➢ على سطح الناقل أوفي النقاط الخارجية القريبة من السطح:

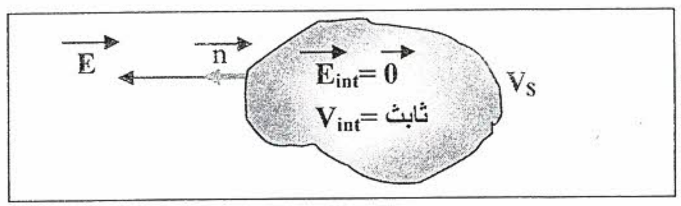
$$\vec{E}\perp\vec{S}\Rightarrow\vec{E}=E\vec{n}\ ،\ \vec{E_T}=\vec{0}$$ [م: 1- VII]

3.ب: الناقل المتوازن يشكل حجما لتساوي الكمون:

إنطلاقا من علاقة الحقل بالكمون [م: 23- VI] وباعتبار أن الحقل معدوم داخل الناقل:

$$\vec{E}=-\,grad\,V=\vec{0}$$

أي أن الكمون ثابت داخل وعلى سطح الناقل (ش: 2- VII):



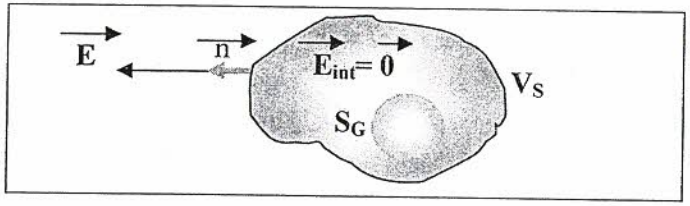
$V=V_{int}=V_S=$ ثابت [م: 2- VII]

أي أن سطح الناقل يمثل سطح تساوي كمون، وبالتالي الحقل $\vec{E}$ يكون عموديا عليه $\vec{E}=E\vec{n}$.

3.ج: الشحنة سطحية:

ينعدم الحقل الكهروستاتيكي عند كل نقطة داخل الناقل، وعليه يكون التدفق ($\Phi=\oiint_S\vec{E}\cdot\vec{dS}$) عبر سطح صغير مغلق معدوما (لأن $\vec{E}=\vec{0}$) (ش: 3- VII).

وحسب نظرية غوص، الشكل التفاضلي(أوالتكاملي) [م: 26- VI] أو [م: 17- VI]:



$$div\,\vec{E}=\iiint_V(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})=\frac{\rho_{int}}{\varepsilon_0}=0$$

أي أن:

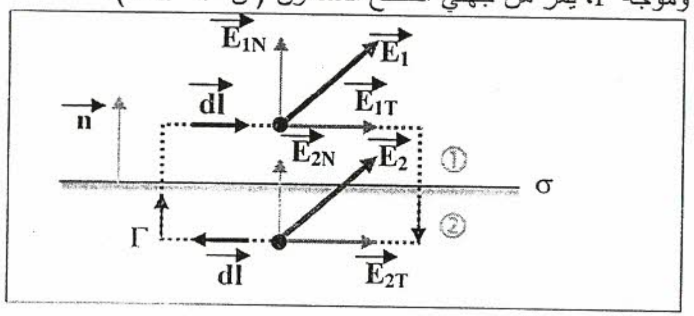
$$\rho_{int}=0$$ [م: 3- VII]

و هذا يعني أن شحنة الناقل تتوزع بكثافة شحنية سطحية σ على سطحه، وليس داخله.

3.د: الحقل قرب سطح ناقل في الفراغ:

د.1: استمرارية المركبة المماسية للحقل:

ليكن سطحا مشحونا بكثافة شحنية سطحية σ، يقسّم الفضاء إلى قسمين ① و②. نعتبر مسار مغلق صغير وموجه Γ، يمر من جهتي السطح المشحون (ش: 4- VII).



➢ $\vec{E}_1(E_{1T}, E_{1N})$: شدة الحقل ومركبتيه جهة السطح الخارجي للناقل.

➢ $\vec{E}_2(E_{2T}, E_{2N})$: شدة الحقل ومركبتيه جهة السطح الداخلي لناقل.

رأينا في الفصل الرابع أن تجوال الحقل تجوالا محافضا، أي معدوما على مسار مغلق($\oint \vec{E}.\vec{dl} = 0$).

$\vec{dl}$ عنصر الإنتقال على المسار المغلق، يكون مماسيا للسطح $(\vec{dl} // \vec{E}_T, \vec{dl} \perp \vec{E}_N)$. يعطى التجوال العنصري إذن بـــ:

$$\vec{E}_1.\vec{dl} - \vec{E}_2.\vec{dl} = 0$$

$$(E_{1N}\vec{n} + E_{1T}\vec{T}).\vec{dl} - (E_{2N}\vec{n} + E_{2T}\vec{T}).\vec{dl} = 0$$

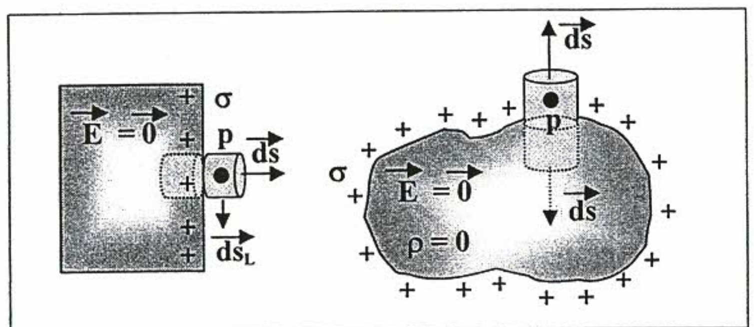
$$\Rightarrow (E_{1T} - E_{2T})dl = 0$$

$$\Rightarrow E_{1T} = E_{2T} \qquad \text{[VII -4:م]}$$

أي أن المركبات المماسية للحقل عبر سطح الناقل مستمرة.

د.2: المركبة الناظمية للحقل. نظرية كولوم:

لحساب شدة الحقل الكهربائي عند نقطة P قريبة جدا من السطح الخارجي للناقل، نطبق نظرية غوص. الناقل عموما مشحون بكثافة شحنية σ ليست منتظمة. نختار سطح غوص أسطوانة صغيرة مساحة قاعدتها ds وارتفاعها صغير جدا، إحدى قاعدتيها داخل الناقل والأخرى خارجة (ش: 5- VII).



التدفق عبر المساحة الجانبية لأسطوانة غوص يكون معدوما (لأن خطوط الحقل عمودية على سطح الناقل $(\vec{E} \perp \vec{ds}_L)$، كذلك التدفق عبر مساحة القاعدة الداخلية يكون معدوما (لأن $\vec{E}_{int} = \vec{0}$)، يبقى فقط التدفق المخترق لمساحة القاعدة الخارجية.

$$d\Phi = \vec{E}.\vec{ds} = Eds = \frac{dQ}{\varepsilon_0}$$

الشحنة داخل سطح غوص:

$$dQ = \sigma ds$$

إذن شدة الحقل:

$$Eds = \frac{\sigma ds}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

و يكون عموديا على السطح، أي:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \qquad \text{[VII-5 :م]}$$

هذه المعادلة الأخيرة [م: VII-5]، تمثل نظرية كولوم،الحقل الكهروستاتيكي الخارجي قرب سطح ناقل مشحون بكثافة شحنية سطحية σ في الفراغ يساوي σ / ε_0.

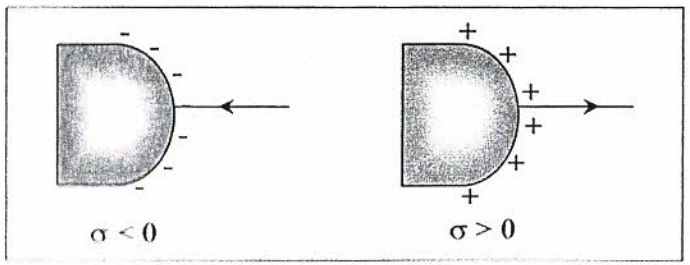
ملاحظـــات:

☜ مقدار عدم إستمرارية الحقل عبر سطح ناقل متوازن هو:

$$\Delta\vec{E} = \left|\vec{E}_{ext}\right| - \left|\vec{E}_{int}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{[VII-6: م]}$$

الحقل الكهروستاتيكي غير مستمر عند اختراق سطح مشحون، غير أن مركبته المماسية مستمرة $(E_{1T} - E_{2T} = 0)$. أي أن عدم استمراريته ناتج عن عدم استمرارية المركبة الناظمية فقط $(E_{1N} - E_{2N} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0})$.

☜ خطوط الحقل تكون عمودية على سطح الناقل، وتكون واردة إلى السطح إذا كانت $\sigma < 0$ ، وصادرة من السطح إذا كانت $\sigma > 0$ (ش: 6- VII).



عندما تتعدى شدة الحقل قرب سطح الناقل حدود معينة تحدث شرارة كهربائية نتيجة تشرد درات الوسط المحيط بالناقل(هذا الحقل بحدود 3MegV/m بالنسبة للهواء)، ويسمى بالحقل المخرب le champ disruptif

3. و: سعة ناقل معزول ومتوازن:

رأينا من أجل شحنة نقطية **q** أن:

- الحقل الناشئ عنها عند نقطة M تبعد مسافة r : $\vec{E} = k\dfrac{q}{r^2}\vec{u_r}$.
- الكمون المطلق الناشئ عنها عند نقطة M تبعد مسافة r: $V = k\dfrac{q}{r}$.

أي أن كلا المقدارين الكهربائيين يتناسبان طرديا مع الشحنة: $E \propto q, V \propto q$ فإذا كانت لدينا شحنة نقطية $q' = \beta.q$ ، فإننا نجد في كل نقطة من الفضاء:

- حقلا: $\vec{E'} = \beta.\vec{E}$
- وكمونا: $V' = \beta.V$

نستنتج أن الشحنة والكمون متناسبان، نكتب هذا التناسب على الشكل:

$$Q \propto V \Rightarrow Q = CV \qquad \text{[م :VII-7]}$$

حيث C ثابت التناسب، في حالة ناقل متوازن ووحيد في الفضاء، كثافة شحنته السطحية σ وكمونه ثابت، فإن C تسمى السعة(المكثفة) الذاتية للموصل المعزول.

ملاحظـــــات:

- السعة C لا تعتمد إلا على شكل الناقل، فعندما يكون الناقل موجودا عند كمونا معينا ، فإن سعته تميز إلى حد ما قابليته واستعداده لتخزين الشحنة.
- وحدة قياس سعة المكثفة في الجملة الدولية هي الفاراد (Farad). من العلاقة [م-VII-7]:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow [C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{C}{V} = F$$

الفاراد وحدة كبيرة جدا، هناك أجزاء الفاراد:

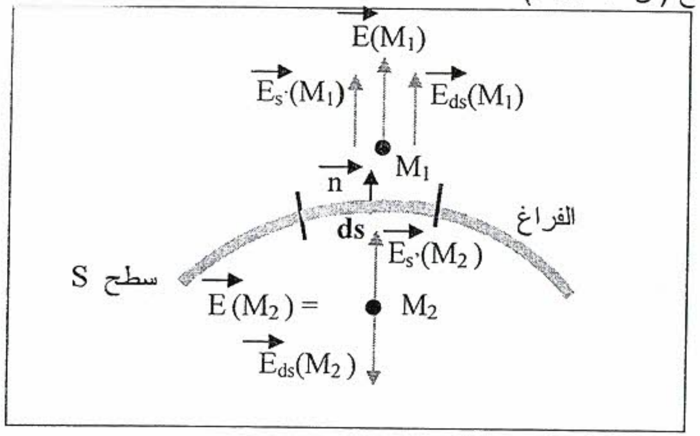
$1\mu F = 10^{-6} F$

$1nF = 10^{-9} F$

$1pF = 10^{-12} F$

4.VII الضغط الكهروستاتيكي

القوة الكهروستاتيكية المؤثرة على الشحنات السطحية ناتجة عن الحقل الموجود على السطح (ش: 7- VII).



M_1, M_2: نقطتين على جانبي السطح الفاصل **S** وقريبتين جدا منه.

$\vec{E_{ds}}(M_1)$: الحقل الناشئ عن الشحنة ($dq = \sigma ds$ (المحمولة من قبل العنصر السطحي ds عند النقطة M_1.

$\vec{E_{s'}}(M_1)$: الحقل الناشئ عن بقية التوزيع ($S' = S - ds$) عند النقطة M_1 أو أية شحنة أخرى غير منشأة أو منتجة للحقل $\vec{E_{ds}}(M_1)$.

من خاصية التراكب:

$$\vec{E}(M_1) = \vec{E_{ds}}(M_1) + \vec{E_{s'}}(M_1)$$

و لكن حسب نظرية كولوم [م: VII-5]، الحقل الناشئ عند نقطة خارجية وقريبة جدا من سطح الناقل، يكون عموديا وباتجاه الخارج وشدته σ/ε_0، ومنه:

$$\vec{E}(M_1) = \vec{E_{ds}}(M_1) + \vec{E_{s'}}(M_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \qquad \text{[م: VII-8]}$$

داخل الناقل الحقل معدوما($\vec{E}(M_2) = \vec{0}$):

$$\vec{E}(M_2) = \vec{E_{ds}}(M_2) + \vec{E_{s'}}(M_2) = \vec{0}$$

لكن الشحنة dq تخلق بالقرب من السطح ds حقلا مشابها للحقل الناشئ عن سطح مستوي مشحون بكثافة σ.

$$\vec{E}_{ds}(M_1) = -\vec{E}_{ds}(M_2) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \qquad [\text{VII-10:م}]$$

$$\vec{E}_s'(M_1) = \vec{E}_s'(M_2) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \qquad [\text{VII-11:م}]$$

☜ القوة الكهرستاتيكية المطبقة على ds والناشئة عن بقية التوزيع S':

$$d\vec{F} = dq\,\vec{E}_s' = \sigma dS \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS\,\vec{n} \qquad [\text{VII-12:م}]$$

مهما تكون طبيعة الشحنة موجبة أو سالبة، فإن هذه القوة تكون دوما نحو الخارج $(\pm\sigma)^2 = \sigma^2$.

☜ <u>ندخل الآن مفهوم الضغط الكهروستاتيكي P_e</u>:

$$P_e = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\sigma E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad [\text{VII-13:م}]$$

حيث E هو الحقل الناشئ على سطح الناقل **[م: VII-7].**

ملاحظـــات:

☜ يمكن التأكد من أن أبعاد P_e هي فعلا أبعاد الضغط.

$$[P_e] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{N}{m^2} = Pascal = \text{باسكال}$$

☜ إذا كان الحقل $E_{s'}$ شديدا، يمكن أن يؤدي هذا إلى إقتلاع إلكترونات من السطح، هذه الظاهرة تسمى بظاهرة الإنبعاث البارد.

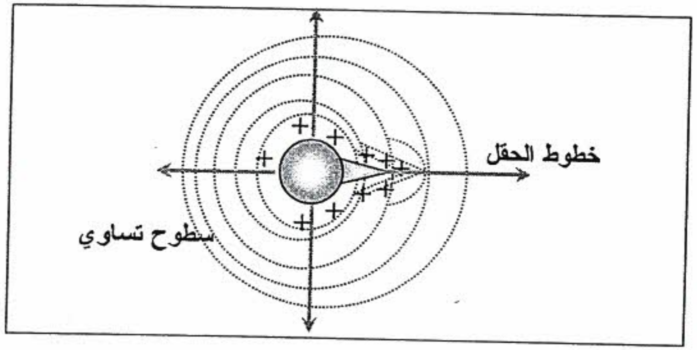
☜ إنطلاقا من العلاقة[م: VII-12]، يمكن إيجاد القوة الكهروستاتيكية المطبقة على ناقل، وذلك بتطبيق مبدأ التراكب (التكامل).

$$\vec{F} = \oint_S d\vec{F} = \oint_S P_e\,d\vec{S} = \oint_S \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.dS\,\vec{n} \qquad [\text{VII-14:م}]$$

5.VII قدرة السطوح الحادة (المذببة)

اتضح تجريبيا أن الشحنات الكهربائية تتراكم أكثر على الأجزاء السطحية التي يكون نصف قطر انحنائها صغيرا، أي أن الكثافة الشحنية تكون أكبر عند الأطراف الحادة (الرؤوس الحادة) للناقل، وبالتالي يكون الحقل عندها شديد أيضا ($E = \sigma/\varepsilon_0$)، نستنتج أن شدة الحقل قرب سطح ناقل تعتمد على شكل الناقل.

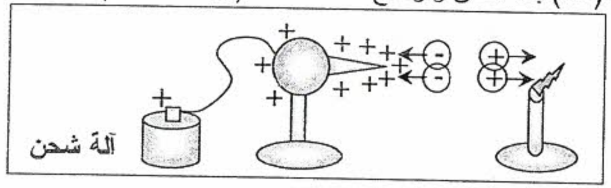
☜ ليكن الناقل المذبب ذو الشكل الآتي(ش: 8- VII)، والمشحون بشحنة موجبة($\sigma > 0$). يمكن ملاحظة مايلي:



1. <u>**خطوط الحقل:**</u> تكون باتجاه الخارج وعمودية على السطح وشديدة عند الرأس الحاد. عند المسافات البعيدة عن الناقل يبدو الحقل وكأنه ناشئ عن شحنة نقطية (خطوط الحقل ملتقية في نقطة مركزية).
2. <u>**سطوح تساوي الكمون**</u>: تظهرعلى هيئة كرات كبيرة بعيدا عن الناقل، وعند الإقتراب منه تقترب سطوح تساوي الكمون من شكل الناقل، إلى غاية الناقل تنطبق عليه، وهو نفسه سطح تساوي كمون في حالة التوازن.
3. <u>**كثافة خطوط الحقل:**</u> عند الرؤوس الحادة تبدو سطوح تساوي الكمون متضاغطة وكثيفة، مما يؤكد كبر شدة الحقل الكهربائي عند تلك الرؤوس، وسبب ذلك واضح: عند شحن الناقل تبتعد الشحنات عن بعضها بسبب التنافر الكهروستاتيكي إلى أبعد نقاط سطح الجسم الموصل، لتتجمع عند النهايات الحادة، فتشكل كثافة شحنية عالية عند تلك النقاط ومنه شدة حقل شديدة ($E = \sigma/\varepsilon_0$).

8.أ. تجربة الرياح الكهربائية:

تجربة:
يشحن جسم مذبب(حاد) بآلة شحن وتوضع أمامه شمعة (ش: 9- VII).



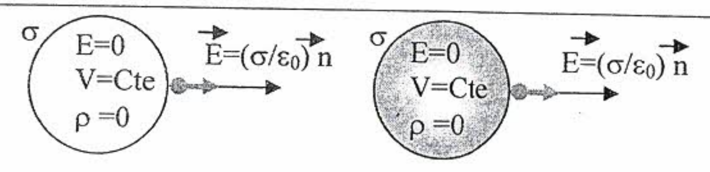
نلاحظ:
ميلان لهب الشمعة نحو اليمين.

تفسير:
لما كانت شدة الحقل عالية عند الرؤوس الحادة، يؤدي هذا إلى تأين (تشرد) ذرات الهواء أو الغاز المحيط بالناقل، فتنجذب نحو الناقل الشوارد التي تحمل شحنة معاكسة لشحنة الناقل، وبذلك تعدل من شحنته، ونقول عندئذ أن الرأس الحاد فُرغ من شحنته, بينما الشوارد التي تحمل نفس شحنة الناقل، تنفر وتبتعد عنه مسببة حركة عشوائية للهواء المحيط بالناقل، ويحدث ما يسمى بالرياح الكهربائية.

لتفريغ (تعديل) شحنة الناقل عن طريق الرأس الحاد، تطبيقات عملية عديدة منها:

1. واقيات الصواعق فوق المباني.
2. أجنحة الطائرات المعدنية الحادة.

ملاحظات:
☜ ناقلين متشابهين من الناحية الهندسية، أحدهما مملوء والآخر مجوف يمكن اعتبارهما متماثلين من الناحية الكهربائية في حالة التوازن (ش: 10- VII).

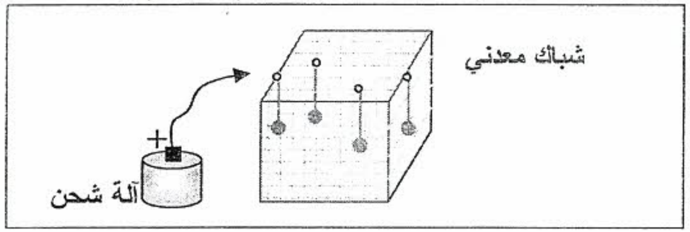


أ. ناقل مملوء — ب. ناقل مجوف

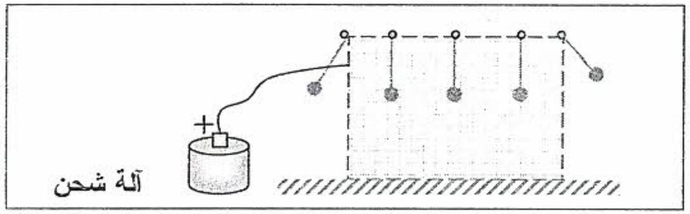
6.VII الحماية الكهروستاتيكية

6.أ: الشاشة الكهربائية:

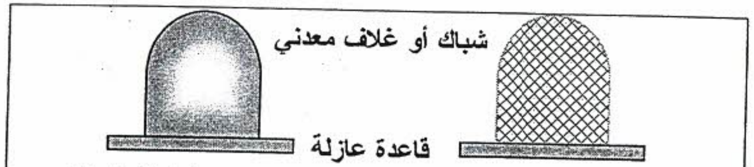
تجربة:
شباك معدني على هيئة مكعب، تعلق به نواسات كهربائية، ثم يشحن (ش: 11- VII).



نلاحظ:
بعد شحنه نلاحظ أن النواسات الخارجية تنزاح إزاحات كبيرة بينما النواسات الداخلية لم تتغير مواضعها أو تنزاح إزاحات صغيرة جدا (ش: 12- VII).



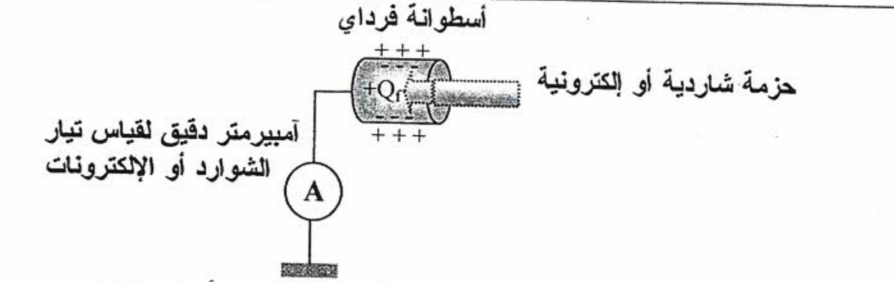
استنتاج:
نستنتج أن الحقل داخل الشباك مهمل أو معدوم، بينما خارج الشباك شديد $\vec{F}=q\vec{E}$ وأنه تصرف وكأنه ناقل مغلق(سطح مغلق) لا توجد به فتحات، إذ يحمي الداخل من الحقول الكهربائية الخارجية ويقوم بدور ما يسمى **بالشاشة الكهربائية**. بنفس الطريقة ركاب السيارة محميون من الصواعق الرعدية بالهيكل المعدني للسيارة، كذلك تحمى الأجهزة الإلكترونية الدقيقة من الحقول الكهربائية الخارجية بوضعها داخل صناديق أو شبابيك معدنية موصولة بالأرض لتفريغها من الشحن الكهربائية المتراكمة على سطحها الخارجي(ش: 13-VII)، حيث تكون الحقول بداخلها معدومة، حتى لا تتعرض عند تشغيلها إلى إضطرابات.



(ش: VII-13): يمكن حماية الأجهزة بوضعها داخل علبة فرداي الشبكية أو الصلبة

6.ب: علبة- أسطوانة- فرداي FARADAY:

علبة فرداي عبارة عن علبة عميقة أسطوانية الشكل مصنوعة من النحاس (عميقة: لضمان ظاهرة الحث الكلي)، إحدى نهايتيها مغلقة والأخرى مفتوحة (ش: VII-14)، تظهر شحنة محتثة سالبة على السطح الداخلي نتيجة تأثير شحنة الشوارد الموجبة، وتظهر بسبب ظاهرة الحث هذه شحنة أخرى محتثة موجبة على السطح الخارجي تساوي في القيمة الشحنة المحتثة على السطح الداخلي (يمكن تحقيق ظاهرة الحث الكلي عندما تكون الأسطوانة عميقة). تنعدم الضحنة الحاثة والمحتثة داخل الأسطوانة، وتبقى الشحنة الخارجية التي تساوي تماما الشحنة الحاثة Q_f المراد قياسها.

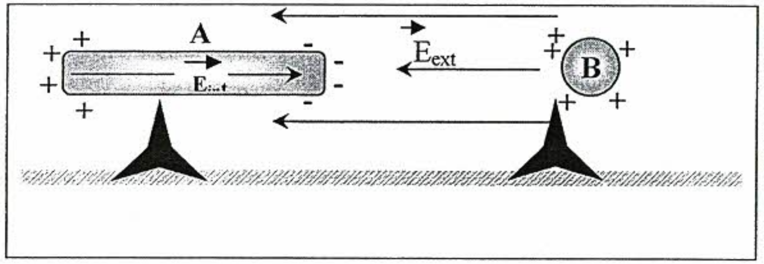


(ش: VII-14): قياسات دقيقة في مسرعات الشوارد باستعمال أسطوانة فرداي.

7.VII الحث (التأثير) الكهروستاتيكي

7.أ: الناقل في حقل كهربائي خارجي:

ليكن ناقل معزول A ، بداية غير مشحون واقع في حقل خارجي $\vec{E}_{ext}$ ناشئ عن جسم B مشحون إبتداءا بشحنة موجبة مثلا (ش: VII-15).



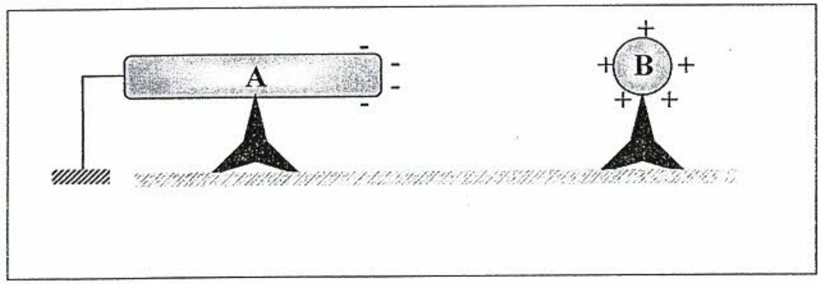
تبدأ الشحنات على الناقل A بالحركة، فتظهر شحنات من إشارة مختلفة جهة الناقل B ومن نفس إشارة B في الجهة الأخرى. نقول أن الموصل A شحن بالتأثير (الفصل الثاني). وتفسير ذلك هو أن الإلكترونات ذات الشحنة السالبة تخضع لقوة ($\vec{F}=-e\vec{E}$) إتجاهها عكس إتجاه الحقل الخارجي $\vec{E}_{ext}$ ، فتتحرك الإلكترونات إذا عكس اتجاه الحقل الخارجي(أي من اليسار إلى اليمين)، فتظهر زيادة في الإلكترونات في الجهة اليمنى مقابل الموصل B ، ونقص في الإلكترونات في الجهة اليسرى (شوارد موجبة)، فيتولد بين طرفي الموصل **A** حقل كهربائي داخلي معاكس $\vec{E}_{int}$. تستمر عملية تحريك الشحنات وتزداد معها شدة الحقل الداخلي إلى أن يتساوى الحقلين الداخلي والخارجي ($\vec{E}=\vec{E}_{ext}+\vec{E}_{int}=\vec{0}$)، فتتوقف عندها حركة الإلكترونات ويصل الموصل إلى حالة توازن كهروستاتيكي.

ملاحظات:

- شحنة الجسم B تسمى بالشحنة الحاثة (المؤثرة) والشحنات الموجبة والسالبة التي ظهرت على الناقل A تسمى بالشحنات المحتثة، والعملية برمتها تسمى بعملية الحث أو التأثير الكهروستاتيكي، والحقل الكهربائي الداخلي $\vec{E}_{int}$ يسمى بالحقل المحتث.
- نلاحظ أنه حدث تغيرا في توزيع الشحنة على سطح الناقل **A** وأصبح مستقطبا ولم يحدث

تغيرًا في قيمة شحنته.

- إذا أبعدنا الجسم B فإن الناقل A يعود إلى حالته الإبتدائية (يصبح غير مستقطب).
- إذا كان الجسم B ناقلا فإنه تحدث عملية تأثير متبادل مع الجسم **A** (التوازن الكهروستاتيكي لجسمين ناقلين).
- عند توصيل الناقل A بالأرض(ش: 16− VII)، فإن الشحنة الموجبة على يسره تتعدل بانتقال إلكترونات من الارض، فهي شحنات حرة غير مقيدة بالفعل الكهروستاتيكي، بينما الشحنة السالبة القريبة من الجسم B فهي شحنات مقيدة بفعل التجاذب الكهروستاتيكي لا تتعدل بالتوصيل بالأرض.

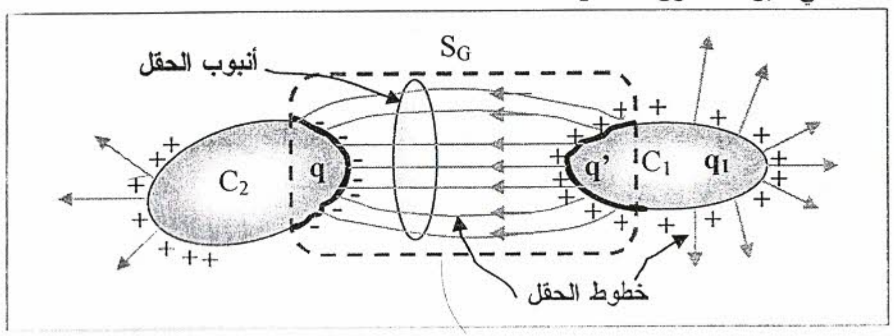


7.ب: الحث(التأثير) الجزئي:

نأخذ ناقلين متقابلين C_1 وC_2 (ش: 17− VII)، الأول مشحون بشحنة موجبة مقدارها q_1 والثاني متعادل كهربائيا، عند تقريبهما من بعضهما تظهرعلى الناقل الثاني شحنة محتثة سالبة $-q$ مقيدة بسبب قوى التجاذب، وشحنة موجبة $+q$ حرة في الجهة الاخرى البعيدة عن واجهة الناقل C_1 .

- يمكن تعديل الشحنةالحرة الموجبة على الناقل C_2 بتوصيله بالأرض.

نلاحظ من الشكل أن جزءا فقط من خطوط الحقل الناشئة خن شحنة الناقل الاول C_1 تصل إلى الناقل الثاني غير المشحون أصلا C_2



1.حساب الشحنة المحتثة:

نختار سطح غوص S_G بحيث يضم كل الخطوط الخارجة من الناقل C_1 والتي تصل إلى الموصل الثاني C_2، وبتطبيق نظرية غوص:

- ليس هناك خطوط تخترق المساحة الجانبية، فالتدفق عبرها إذا يكون معدوما.
- التدفق المخترق لمساحتي القاعدتين الواقعتين داخل الناقلين معدوما كذلك لإنعدام الحقل داخلهما.
- إذا التدفق المخترق لسطح غوص معدوما:

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = 0 \qquad [\text{م:}15\text{-VII}]$$

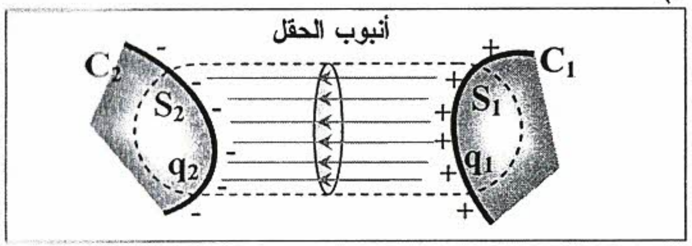
$$\Rightarrow \sum q_i = 0 \Rightarrow q + q' = 0 \Rightarrow q = -q'$$

حيث q' هي جزء من شحنة الناقل C_1 والموجودة داخل سطح غوص، وبالتالي فإن قيمة الشحنة السالبة المحتثة $|q|$ على الناقل C_2 أقل من الشحنة الحاثة q_1 على الناقل C_1.

إن عملية الحث(التأثير) هذه تسمى بالحث الجزئي، لأن جزء فقط من خطوط الحقل الناشئ عن الناقل المشحون C_1 تصل إلى الناقل غير المشحون أصلا C_2.

7.جـ نظرية العناصر المتقابلة:

في الشكل السابق يتقاطع أنبوب الحقل مع الناقل C_1 في المساحة S_1 ومع الناقل C_2 في المساحة S_2، وهما مساحتين متقابلتين يحملان شحنتين مختلفتين في الإشارة ومتساويتين في المقدار (ش:18− VII).



من المعادلة [م:15-VII]:

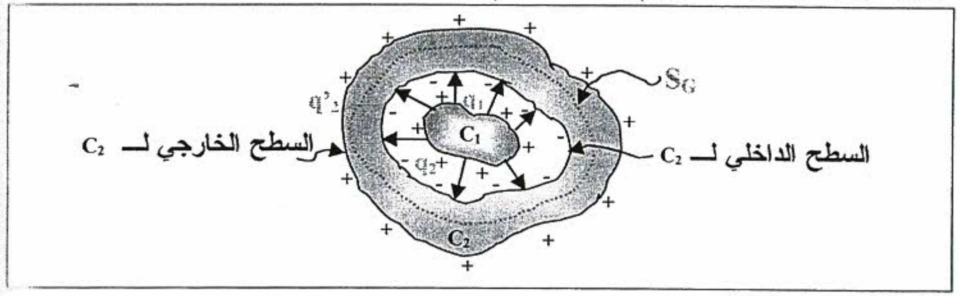
$$q_1 = -q_2$$

$$\Rightarrow \sigma_1 S_1 = -\sigma_2 S_2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = -\left(\frac{S_2}{S_1}\right) \qquad [\text{م:}16\text{-VII}]$$

S_1 و S_2 تسميان بالعناصر أو المساحات المتقابلة.

7.د: الحث (التأثير) الكلي:

عندما تصل كل خطوط الحقل الناشئ عن الناقل المشحون C_1 الذي شحنته q_1 إلى الناقل غير المشحون C_2 ، فإن عملية الحث تسمى بالحث الكلي. في هذه الحالة الناقل غير المشحون C_2 يحيط كلية بالموصل المشحون (ش: 19 - VII).



أ. حساب الشحنة المحتثة q_2 على السطح الداخلي للناقل C2 :

بتطبيق نظرية غوص، واختيار سطح غوص كما في الشكل، وبما أن الموصل في حالة توازن يكون الحقل بداخله معدوما $\left(\vec{E}=\vec{0}\right)$، إذا:

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow \sum q_i = q_1 + q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = -q_1 \qquad \text{[م: VII-17]}$$

إذن في حالة الحث (التأثير) الكلي تكون الشحنة المحتثة q_2 تساوي في المقدار الشحنة الحاثة q_1 وتعاكسها في الإشارة.

ملاحظـــات:

- إذا كان الناقل الخارجي C_2 مشحون أصلا بشحنة **q** ، فإن الشحنة الكلية عليه تساوي المجموع الجبري لكل الشحن المحتثة زائد شحنته الاصلية. ومن مبدأ إنحفاظ الشحنة الكهربائية على الناقل C_2 ، يجب أن تكون الشحنة مساوية إلى:

$$q = q'_2 + q_2 \qquad \text{[م: VII-18]}$$

حيث q_2 الشحنة المحتثة على السطح الداخلي $(q_2 = -q_1)$ و q'_2 هي الشحنة السطحية للناقل C_2.

- عندما يكون الناقل C_2 غير مشحون أصلا، أي $(q = 0)$ فإن:

$$q'_2 = -q_2 \qquad \text{[م: VII-19]}$$

- عندما يوصل الناقل C_2 غير المشحون أصلا بالأرض، فإن كمونه يصبح مساويا للصفر وشحنته الحرة q'_2 تتعدل $(q'_2 = 0)$ وتبقى فقط شحنته المقيدة $(q_2 = -q_1)$ على سطحه الداخلي.

8.VII معاملات الحث في حالة جملة من النواقل المتوازنة

رأينا سابقا أن الجسم الناقل المعزول يملك في حالة التوازن الكهروستاتيكي سعة ذاتية C، وهي ثابت التناسب الطردي بين شحنته Q وكمونه V [م: VII-7].

$$Q \propto V \Rightarrow Q = CV$$

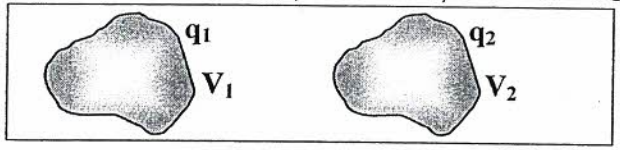
يمكن كتابة هذه العلاقة في الحالة العامة كمايلي:

$$q_i = C_{ii} V_i \qquad \text{[م: VII-20]}$$

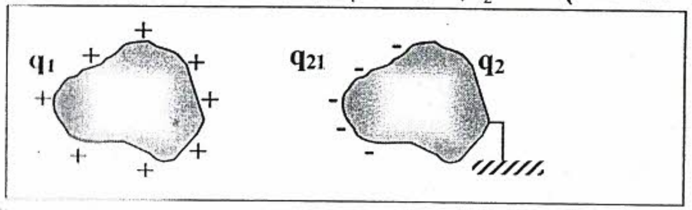
حيث C_{ii} تسمى سعة الجسم i وتعتمد فقط على الأبعاد الهندسية للجسم الناقل. نحاول تعميم هذا المفهوم على مجموعة من النواقل المعزولة عن المحيط الخارجي، لكنها واقعة تحت تأثير بعضها البعض.

8.أ: حالة جسمين معزولين:

في هذه الحالة الجسمان معزولان عن المحيط الخارجي، لكنهما غير معزولان فيما بينهما، أي واقعان تحت تأثير بعضها البعض (ش: 20 - VII).



لتكن شحنة الموصل الأول q_1 موجبة، والموصل الثاني متعادل كهربائيا ابتداءا وموصل بالأرض (ش: 21 - VII). $V_2 = 0$ لأن الجسم موصول بالأرض.



سوف تتولد على الجسم الثاني شحنة محتثة مقدارها q_{21} متناسبة مع كمون الناقل الأول $(q_{21} \propto V_1)$ وثابت التناسب يرمز له بالرمز C_{21} ويسمى معامل الحث الكهروستاتيكي المتبادل بين الناقلين الأول والثاني. أما إذا كان كمون الموصل الثاني V_2 غير معدوم، فإن شحنته تصبح عبارة عن مجموع شحنته الذاتية زائد شحنته المحتثة الناتجة عن وجود الناقل الأول:

$$q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \qquad [\text{VII-21 :م}]$$

حيث C_{22} تمثل السعة الذاتية للموصل الثاني بوجود الموصل الأول. ونفس الشئ يحدث مع الموصل الأول، حيث يمكن كتابة شحنته q_1 على الشكل:

$$q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \qquad [\text{VII-22 :م}]$$

حيث C_{11} هي السعة الذاتية للناقل الأول بوجود الناقل الثاني و C_{12} هو معامل الحث المتبادل بين الناقلين.

إذا يمكن كتابة المعادلتين السابقتين كمايلي:

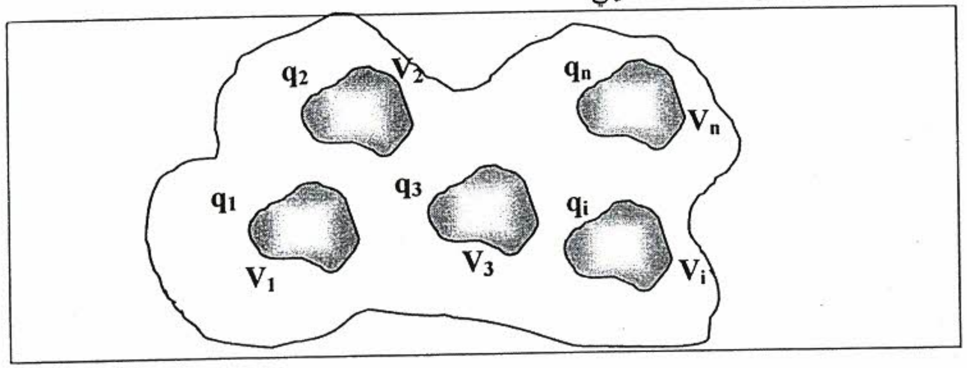
$$q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$
$$q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

و بدلالة المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [q_i] = [C_{ij}][V_i] \qquad [\text{VII-23:م}]$$

8.ب: حالة عدة أجسام معزولة:

يمكن تعميم العلاقات أعلاه إلى n جسم موصل معزول عن المحيط الخارجي (ش: 22– VII). وتكتب عندها مصفوفة السعة كما يلي:



$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ | \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & - & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & - & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & - & C_{3n} \\ | & | & | & | & | \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & - & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ | \\ V_n \end{bmatrix}$$

حيث شحنة الموصل i تعطى بـــ:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot V_j \qquad [\text{VII-24 :م}]$$

ملاحظــــات:

- المعاملات C_{ij} في حالة $i \neq j$ تسمى معاملات الحث المتبادل بين الناقلين i و j ، بينما في حالة $i = j$ المعامل C_{ij} يسمى سعة الناقل i بوجود بقية الموصلات.
- سعة الموصل i المعزول لا تساوي سعة نفس الموصل i بوجود موصلات أخرى مجاورة.
- $C_{ij} = C_{ji}$ ، أي أن المصفوفة متناظرة قطريا، لأن C_{ij} يعتمد على هندسة التوزيع (أي شكل الموصل والمسافة بين الموصلات)، فقيمة المعامل الرابط بين i و j لا تتغير إذا استبدلنا أماكن i و j .
- السعات الذاتية C_{ii} موجبة بينما معاملات الحث المتبادل C_{ij} سالبة.

ملخص

- خصائص الناقل "أو الموصل" المتوازن:
  - شحناته ساكنة
  - ينعدم الحقل داخل الناقل المتوازن $\vec{E}_{int} = \vec{0}$
  - يمثل الناقل المتوازن حجما لتساوي الكمون $V = Cte$
  - شحنة الناقل المتوازن شحنة سطحية $\rho_{int} = 0$
  - الحقل قرب السطح الخارجي لناقل، ناظميا باتجاه الخارج وشدته ($\sigma/_{\varepsilon_0}$ نظرية كولوم).
- سعة ناقل: هي قدرته على تخزين الشحنة وهي النسبة بين شحنته Q وكمونه V .($C = Q/_V$).
- الضغط الكهروستاتيكي: $P_e = \dfrac{dF}{dS} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \dfrac{1}{2}\sigma E = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$
- قدرة السطوح الحادة ' المذبية": الكثافة الشحنية تكون أكبر عند الأطراف الحادة (الرؤوس الحادة) للناقل أو على السطوح ذات نصف قطر الإنحناء الأصغر.
- الحث 'التأثير' الكهروستاتيكي: الشحنة الحاثة والمحثوثة تكونان من إشارتين مختلفتين.
  - الحث الجزئي: جزء فقط من خطوط الحقل الناشئ عن الناقل المشحون تصل إلى الناقل غير المشحون.
- نظرية العناصر المتقابلة: المساحتين المتقابلتين من ناقلين والمحتواتين في نفس أنبوب أشعة الحقل تحملان شحنتين متساويتين في المقدارو مختلفتين في الإشارة.

$$q_1 = -q_2 \Rightarrow \sigma_1 S_1 = \sigma_2 S_2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = -\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$$

- الحث الكلي: كل خطوط الحقل الناشئ عن الناقل المشحون تصل إلى الناقل غير

المشحون وتكون الشحنة المحثة تساوي في المقدار الشحنة الحاثة وتعاكسها في الإشارة.

- عند توصيل ناقل بالأرض، ينعدم كمونه وشحنته الحرة، بينما شحنته المقيدة لا تنعدم.
- معاملات الحث والسعة:
  - شحنة الناقل i دالة خطية لكمونات بقية النواقل المجاورة.

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot V_j$$

تكون لدينا إذن n معادلة حيث يمكن كتابتها على شكل مصفوفة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ | \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & - & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & - & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & - & C_{3n} \\ | & | & | & | & | \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & - & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ | \\ V_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow [q] = [C][V]$$

- العناصر اللا قطرية C_{ij} $(i \neq j)$ تسمى معاملات الحث المتبادل بين الناقلين i و j ودوما: $C_{ij} = C_{ji} < 0$.
- العناصر القطرية C_{ii} $(i = j)$ تسمى سعات الناقل i بوجود بقية النواقل وهي دوما موجبة. $C_{ii} > 0$

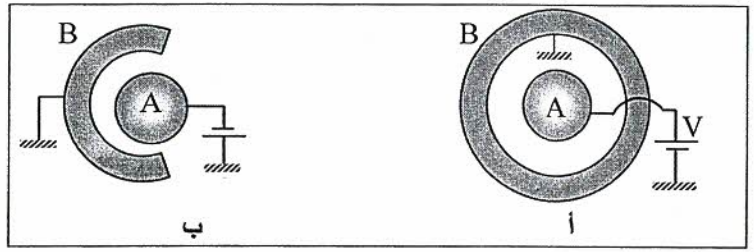
تمارين محلولة

التمرين 01:

حدد نوعية الشحنة على كل سطح في النواقل الآتية (ش: 23− VII).

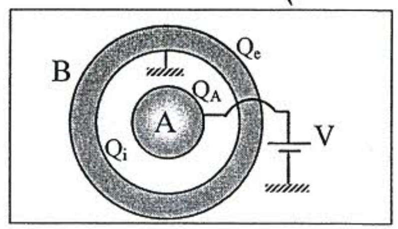
أ. كرتين متحدتي المركز، الكرة الخارجية B مجوفة.

ب. كرة محاطة بنصف كرة مجوفة.



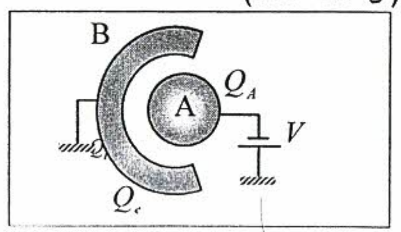
الحل

أ. ظاهرة الحث الكلي(ش: 24− VII)..



- الشحنة الحاثة $Q_A > 0$
- الشحنة المحتة المقيدة $Q_i = -Q_A$ لا تتعدل بالتوصيل بالأرض
- الشحنة المحتثة الحرة على السطح الخارجي $Q_e = Q_A$ لا تتعدل بالتوصيل بالأرض.

ب. ظاهرة الحث الجزئي. (ش: 25− VII).



- الشحنة الحاثة $Q_A < 0$
- الشحنة المحتة المقيدة $Q_i > 0$ و $Q_i < |Q_A|$
- الشحنة المحتة الحرة على السطح الخارجي $Q_e = 0$ (السطح الخارجي موصول بالأرض)

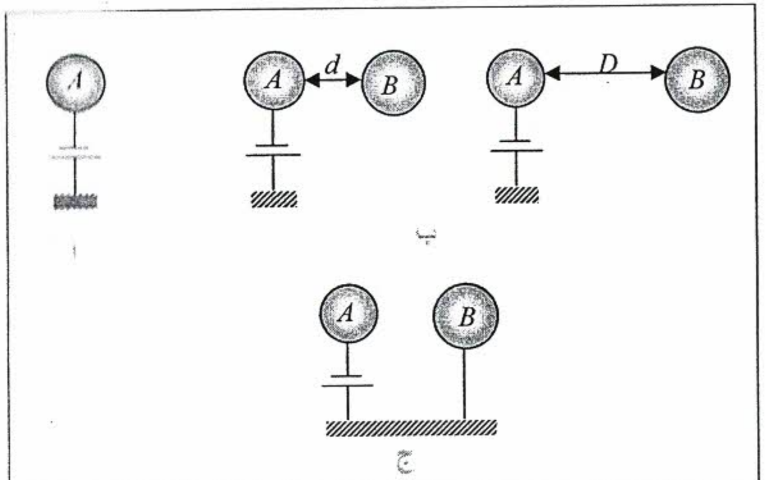
التمرين 02:

1. وضعت كرة ناقلة A تحت كمون ثابت بالنسبة للارض بواسطة مولد (ش: 26−VII. أ).

أ. ماذا يجب أن نفترض حتى نقبل أن الشحنة موزعة بانتظام على الكرة؟ مثل هذه الشحنة.

ب. نقرب من A ناقلا B متعادلا ومعزولا(ش: 26−VII. ب). صف بطريقة كيفية ماذا يحدث على الناقلين A و B وداخل المولد أثناء عملية اقتراب B، مثل توزيع الشحنات على كل من A و B من أجل مسافات مختلفة: ما لانهاية، d و D ($D > d$).

ج. نعتبر الآن أن الناقلين A و B ساكنين على بعد d من بعضهما، نوصل الناقل B بالأرض بواسطة خيط ناقل(ش: 26−VII. ج). صف كيفيا ماذا يحدث؟ مثل التوزيعات الجديدة للشحنات بعد التوصيل.



2. نقترح الآن إعادة المسألة السابقة إلى حالة خاصة تسمح بالوصول بعد بعض الحسابات إلى نتيجة كمية.

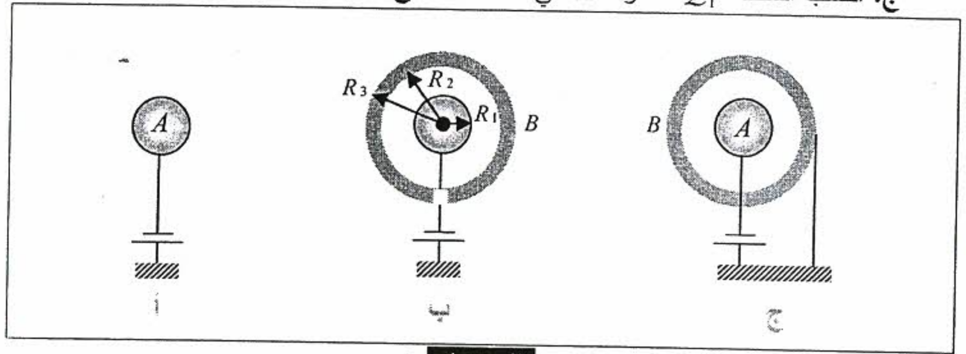
- A كرة ناقلة نصف قطرها R_1 واقعة تحت كمون V_A (ش: 27−VII. أ).

B كرة ناقلة مجوفة نصف قطرها الداخلي R_2 والخارجي R_3 متمركزة مع الكرة A (ش: 27-VII. ب).

أ. أحسب الشحنة Q_0 للكرة A في حالة الشكل أ

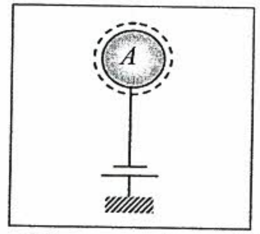
ب. أحسب الشحنة Q_1 للكرة A في حالة الشكل ب

ج. أحسب الشحنة Q_1' للكرة A في حالة الشكل ج



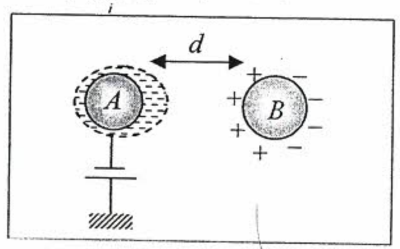
الحل

1.أ: القطب السالب للمولد موصول بالكرة: إذن سوف تشحن بشحنة(ش: 28-VII. أ). سالبة. حتى تتوزع الشحنة بانتظام يجب:



- أن تكون الكرة متجانسة (لا توجد بها رؤوس حادة) ومعزولة.
- إهمال فعل الرؤوس الحادة لسلك التوصيل والقطب السالب للمولد، أي إهمال شحناتهما أمام شحنة الكرة.

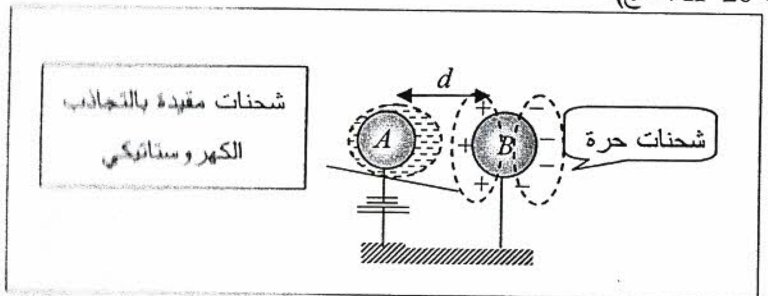
1.ب: نقرب من A ناقلا B متعادلا ومعزولا($\sum_i q_i = 0$)(ش: 28-VII. ب)



في البداية يحدث تأثير متبادل بينهما

- الشحنة السالبة المحمولة على A تؤثر على B حيث يستقطب هذا الأخير ويظهر عليه قطبين، الموجب جهة الناقل A (ش: 28-VII. ب)
- بعد ذلك بدوره الناقل B يؤثر على الناقل A ، حيث يغير توزيع كثافة الشحنة على سطحه, حيث تصبح كثافة الشحنة على A غير منتظمة(أكبر جهة B)، هذا التغير في توزيع الشحنة على سطح الناقل A يؤدي بالضرورة إلى تغير كمونه، لكن المولد يعمل على تثبيت القيمة الإبتدائية وذلك بنقل إلكترونات جديدة من الأرض إليه.
- على بعد D حيث $D > d$ ، تضعف ظاهرة الإستقطاب السابقة
- عندما نبعد B إلى ما لانهاية، فإنه يصبح غير واقع في الحقل الكهربائي للناقل A ($\vec{E}(\infty) = \vec{0}$)، فلا نشاهد ظاهرة الحث، ويبقى الناقل B متعادلا غير مشحون.

1.ج: المسافة d بين الناقلين A و B الآن ثابتة ، عندما تصل الناقل B بالأرض (ش: 28-VII. ج).



يحدث تغيرا في توزيع الشحنة على سطحه، بحيث يصبح كمونه يساوي الصفر (موصولا بالأرض $V_B = 0$)، لذلك تتسرب الشحنة السالبة الحرة إلى سطح الأرض، ويصبح عندها الناقل B يحمل شحنة موجبة (ينعدم كمون B بسبب الشحنة السالبة على الناقل A)

- أما على سطح الناقل فتزداد الكثافة الشحنية بقدوم شحنات عبر المولد وذلك للحفاظ على كمون A ثابت (ش: 28-VII. د).

2.أ. حساب Q_0: $Q_0 \propto V_A$

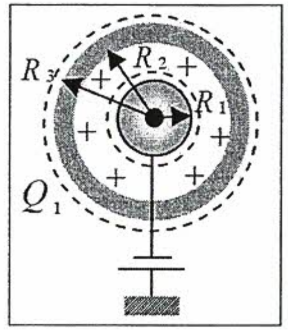
إذن نحسب كمون الكرة. بما أن الكرة في حالة توازن كهروستاتيكي، فهي عبارة عن حجم تساوي كمون " أي الكمون نفسه في كل النقاط). فكمون الكرة في مركزها عبارة عن كمون شحنة نقطية: $V_A = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

فبالتالي: $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R V_A$

ملاحظة:
يمكن حساب الحقل باستعمال نظرية غوص، ثم نجد الكمون بتطبيق العلاقة $\vec{E} = -\vec{grad}\ V$.

2. ب. لحساب Q_1 شحنة الناقل A يجب حساب جهده V_A (مع ملاحظة أن الحث كليا بين الكرتين) (ش: VII-28. هـ).

لحساب كمون A، نحسب أولا كمون B، ومن مبدأ إستمرارية الكمون نصل في النهاية لحساب V_A.



☜ $R_1 < r < R_2$:

$$V_2(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_1$$

☜ $r > R_3$:

$$V_3(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$$

☜ $R_2 < r < R_3$: $\left(\sum_i Q_i = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}\right)$

$$V = 0$$

• $$V_3(r \to \infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_3 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

☜ B عبارة عن حجم تساوي كمون:

$$V_2(r = R_2) = V_3(r = R_3) = V_B$$

• $$V_2(r = R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + C_1 = V_3(r = R_3) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right]$$

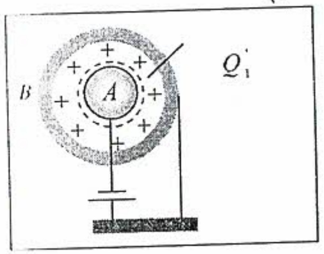
إذن:

☜ الكمون الناشئ عن الكرة A هو $V_2(r = R_1)$

$$V_2(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right] = V_A$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 - R_1 R_3} V_A$$

2. ج. الناقل B موصول بالأرض، هذا يعني أن كمونه معدوم وشحنته الخارجية الصغرى Q_1 تتسرب إلى الأرض(ش: VII-28. و).



☜ $R_1 < r < R_2$:

$$V(r) = \frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

$$V(r = R_2) = 0 \Rightarrow C = -\frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_2}$$

$$V(r) = \frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$V(r = R_1) = V_A = \frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] \Rightarrow Q_1' = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_A$$

التمرين 03:

ناقل كروي مركزه o ونصف قطره R، في حالة توازن كهروستاتيكي، يحمل شحنة كلية Q، الكمون معدوم في المالانهاية.

أ. جد الكمون الكهروستاتيكي V_0 للناقل الكروي

ب. أحسب سعة الناقل الكروي المعزول

الحل

أ. كمون الناقل الكروي هو نفسه الكمون الناشئ عن شحنة نقطية موضوعة عند المركز o

والمحسوب على بعد R:

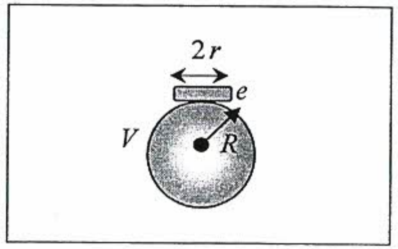
$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 R}$$

ب. من تعريف السعة:

$$C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\,\varepsilon_0 R$$

التمرين 04:

نعتبر ناقل كروي نصف قطره R كمونه V، وليكن ناقل آخر متعادل كهربائيا على شكل قرص نصف قطره r وسمكه e وكتلته m. يوضع القرص فوق الناقل الكروي (ش: 29-VII). ، جد عبارة الكمون النهائي V_0 الذي من أجله يرتفع القرص عن الناقل الكروي.(نعتبر: $e << r$ و $r << R$).



الحل

☜ من نتائج التمارين السابقة (ناقل كروي الشكل)، الكثافة الشحنية السطحية:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

حيث:

$$Q = CV$$

و:

$$C = 4\pi\,\varepsilon_0 R$$

و بالتالي:

$$\sigma = \frac{CV}{4\pi R^2} = \frac{4\pi\,\varepsilon_0 RV}{4\pi R^2} = \frac{\varepsilon_0}{R}V$$

☜ وبالتالي قوة الضغط الكهروستاتيكي المؤثرة من قبل الشحنات الموزعة على سطح الناقل الكروي على القرص:

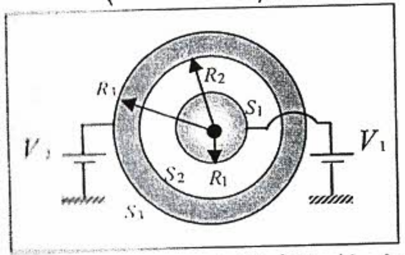
$$\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n} = (\frac{\varepsilon_0}{R}V)^2\frac{1}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

هذه القوة عمودية على السطح وباتجاه الخارج، يرتفع القرص عن السطح الكروي إذا كانت هذه القوة أكبر من ثقله:

$$(\frac{\varepsilon_0}{R}V_0)^2\frac{1}{2\varepsilon_0} = mg \Rightarrow V_0 = \frac{R}{r}\sqrt{\frac{2mg}{\pi\,\varepsilon_0}}$$

التمرين 05:

كرتان متمركزتان، الداخلية مملوءة ونصف قطرها R_1 وسطحها S_1 والخارجية مجوفة نصف قطرها الداخلي R_2 والخارجي R_3 ، سطحيها الداخلي والخارجي S_2 و S_3 على الترتيب، كموني الكرتين V_1 و V_2 ثابتين(ش: 30- VII).



أ. أحسب الحقل والكمون في كل نقاط الفضاء.

ب. أحسب مقدار الشحنة على كل سطح بدلالة الكمونات وأنصاف الأقطار.

ج. أدرس الحالات الخاصة الآتية:

1. إذا كان $V_1 = V_2$
2. الكرة الخارجية موصولة بالأرض.
3. الكرة الداخلية موصولة بالأرض.

الحل

أ.1: بتطبيق نظرية غوص نجد شدة الحقل الكهربائي في كل النقاط (سطوح غوص عبارة عن كرات متحدة المركز)

1. $r < R_1 : E_1 = 0$
2. $R_1 < r < R_2 : E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$
3. $R_2 < r < R_3 : E_3 = 0$ $(Q_1 = -Q_2$ حث كلي)
4. $r > R_3 : E_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r^2}$

أ.2: الكمون عند جميع نقاط الفضاء:

$$V = -\int E dr + C$$

1. $r < R_1 : V_1 = C_1$

2. $R_1<r<R_2: \; V_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r}+C_2$

3. $R_2<r<R_3: \; V_3=C_3$

4. $r>R_2: \; V_4=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r}+C_4$

➢ ثوابت التكامل تستنتج من الشروط الحدية وشروط الإستمرارية:

- **الكمون في الما لانهاية معدوم:**

$$V_4(r\to\infty)=0\Rightarrow C_4=0$$

$$\Rightarrow V_4=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r}$$

- **من مبدأ إستمرارية الكمون:**

1. عند R_3: $\quad V_4(r\to R_3)=V_3(r\to R_3)$

$$\Rightarrow V_3=C_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{R_3}$$

2. عند R_2: $\quad V_3(r\to R_2)=V_2(r\to R_2)$

$$\Rightarrow C_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_3}{R_3}-\frac{Q_1}{R_2}\right)$$

و بالتالي:

$$V_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r}+\frac{Q_3}{R_3}-\frac{Q_1}{R_2}\right)$$

3. عند R_1: $\quad V_2(r\to R_1)=V_1(r\to R_1)$

$$\Rightarrow V_1=C_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_3}{R_3}-\frac{Q_1}{R_2}\right)$$

أ. مقدار الشحنة على كل سطح

- لحساب Q_1 نحسب فرق الكمون بين S_1 و S_2

$$V_1-V_2=-\int_{R1}^{R2}E_2\,dr=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]\Rightarrow Q_1=4\pi\varepsilon_0(V_1-V_2)\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$$

- الشحنة Q_2: من ظاهرة الحث الكلي $Q_2=-Q_1$

- الشحنة Q_3: $\quad V_4(r\to R_3)=V_2$ (كمون المولد)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{R_3}=V_2\Rightarrow Q_3=4\pi\varepsilon_0R_3V_2$$

ج. الحالات الخاصة

1. إذا كان $V_1=V_2=V$

- الشحنات: $\quad Q_1=Q_2=0; \quad Q_3=4\pi\varepsilon_0R_3V_2$

- الحقول: $\quad E_1=E_2=E_3=0; \quad E_4=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r^2}=\frac{R_3}{r^2}V_2$

- الكمونات: $\quad V_1=V_2=V_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{R_3}=V$

4. الكرة الخارجية موصولة بالأرض، أي $V_2=0$

- الشحنات: $\quad Q_1=4\pi\varepsilon_0V_1\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}=-Q_2 \;،\; Q_3=0$

- الحقول: $\quad E_1=E_3=E_4=0; \quad E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}=\frac{R_1R_2}{(R_2-R_1)r^2}V_1$

- الكمونات: $\quad V_1=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right] ، V_2=0 ، V_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{R_3}$

$$V_4=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r}$$

5. الكرة الداخلية موصولة بالأرض، $V_1=0$

- الشحنات: $\quad Q_1=-4\pi\varepsilon_0V_2\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}, \quad Q_2=-Q_1$

$$Q_3=4\pi\varepsilon_0R_3V_2$$

- الحقول: $\quad E_1=E_3=0 \;،\; E_2=-V_2\frac{R_1R_2}{r^2(R_2-R_1)}$

$$E_4=\frac{R_3}{r^2}V_2$$

- الكمونات: $\quad V_1=0 ، V_2=-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]$

$$V_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{R_3} \;،\; V_4=\frac{R_3}{r}V_2$$

التمرين 06:

قرص معدني رقيق جدا، مركزه o ونصف قطره R يحمل على وجهيه شحنات كهربائية ذات كثافة شحنية سطحية، تعطى عند نقطة M تبعد مسافة r عن مركزه بالعلاقة: $\sigma(M) = \alpha r^{\beta}$،

حيث α و β ثابتين

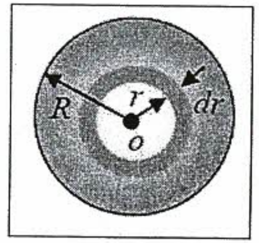
أ. احسب الشحنة المحمولة على وجهي القرص.

ب. أحسب الكمون الكهروستاتيكي V للقرص الناقل وذلك بحساب الكمون $V(o)$ عند مركز القرص.

ج. استنتج من النتائج السابقة سعة الناقل

الحل

أ. الشحنة الكلية (ش: 31- VII):.



$$Q = 2\iint_S dq = 2\iint_S \sigma dS$$

حيث عنصر المساحة dS يكتب على الشكل: $dS = rdrd\theta$

و بالتالي الشحنة الكلية:

$$Q = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \alpha r^{\beta} r dr = 4\pi \int_0^R r^{(\beta+1)} dr$$

$$= \frac{4\pi\alpha}{\beta+2} R^{(\beta+2)}$$

ب. بما ان القرص عبارة عن حجم تساوي كمون، فإن كمونه هو نفسه عند مركزه o، الكمون الناشئ عن الطوق الدائري عند نقطة المركز o:

$$dV_0 = 2\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad avec \quad dq = 2\pi\alpha r^{\beta+1} dr$$

$$dV_0 = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} r^{\beta} dr \Rightarrow V_0 = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\int_0^R r^{\beta} dr = \frac{\alpha}{\varepsilon_0(\beta+1)} R^{\beta+1} = V$$

ج. سعة الناقل:

$$C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\beta+1}{\beta+2} R$$

التمرين 07:

كرتان ناقلتان S_1 و S_2 نصفي قطريهما R_1 و R_2 على الترتيب، توصلان بسلك ناقل طويل جدا، تخضع المجموعة لكمون V

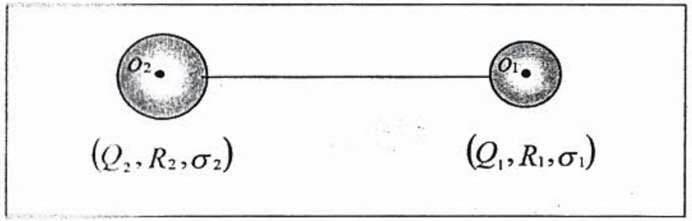
أ. جد النسبة بين كثافتي الشحنتين على سطحي الكرتين.

ب. ناقش النتيجة.

الحل

أ. الكرتان موصولتان بسلك ناقل (ش: 32- VII): يمكن اعتبار المجموعة كناقل وحيد.

➢ خيط التوصيل طويل جدا: يمكن إهمال ظواهر الحث بين الكرتين.



➢ الجملة في حالة توازن:

• الكمون عند o_1:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1}$$

• الكمون عند o_2:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}$$

➢ شحنتي الناقلين الكرويين:

$$Q_1 = \sigma_1 S_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1$$

$$Q_2 = \sigma_2 S_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

ب. إذا كان $R_2 > R_1$ فإن $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > 1$ أي أن: $\sigma_1 > \sigma_2$ ومنه كثافة الشحنة على الكرة الأصغر أكبر (قدرة السطوح الحادة او المذببة)

$$V' = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

➢ التوزيع السطحي للشحنة Q_2 المحمولة على سطح الكرة S_2 والواقعة على بعد d مــن o_1 (يمكن اعتبار أن الشحنة Q_2 مركزة عند o_2):

$$V'' = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

و بما أن:

$$V_1 = V' + V''$$

فإن:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{d}\right)$$

وبنفس الطريقة، يعطى كمون الكرة S_2:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{d}\right)$$

ب. يمكن حساب الشحنتين Q_1 و Q_2 بدلالة الكمونين V_1 و V_2 بسهولة بحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} \dfrac{Q_1}{R_1} + \dfrac{Q_2}{d} = 4\pi\varepsilon_0 V_1 \\ \dfrac{Q_1}{d} + \dfrac{Q_2}{R_2} = 4\pi\varepsilon_0 V_2 \end{cases}$$

نجد:

$$\begin{cases} Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 d^2}{d^2 - R_1R_2} V_1 - 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1R_2 d}{d^2 - R_1R_2} V_2 \\ Q_2 = -4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1R_2 d}{d^2 - R_1R_2} V_1 + 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_2 d^2}{d^2 - R_1R_2} V_2 \end{cases}$$

ج. نستنتج من الجملة السابقة معاملات السعة والتأثير المتبادل للجملة بالمطابقة:

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

نجد:

$$C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 d^2}{d^2 - R_1R_2} > 0 \quad C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2 d^2}{d^2 - R_1R_2} > 0,$$

$$C_{12} = C_{21} = -4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2 d}{d^2 - R_1R_2} < 0$$

من هذا المثال نلاحظ تساوي معاملات الحث المتبادل ($C_{12} = C_{21}$)، بصفة عامة ($C_{12} = C_{21}$).

د. في حالة كون R_1 و R_2 مهملين أمام d.

$C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ ، $C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 R_2$ ، $C_{12} = C_{21} = 0$

الناقلين بعيدين عن بعضهما البعض، وظواهر الحث مهملة (التمرين السابق).

◆ لاحظ أن سعة كرة معزولة في الفضاء ($C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$) تختلف عن سعتها تحت تأثير ناقل آخر ($C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 d^2}{d^2 - R_1R_2}$).

◆ لاحظ كذلك أن $C_{11} > C$ ($C_{11} = C.\frac{d^2}{d^2 - R_1R_2}$, $\frac{d^2}{d^2 - R_1R_2} > 1$)، أي أن سعة الناقل تزداد بوقوعه في كمون ناقل آخر.

التمرين 10

توضع ثلاثة نواقل متشابهة كروية الشكل نصف قطر كل منها R عند رؤوس مثلث متساوي الأضلاع ، ضلعه d. النواقل في حالة حث كهروستاتيكي، نعتبر أن: $R << d$، بحيث يمكن اعتبار أن توزيع الشحنة على كل ناقل يكون منتظما.

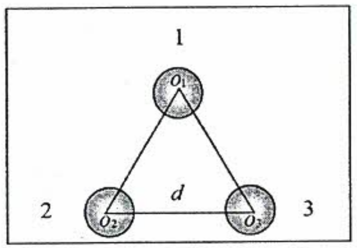
أ. جد السعة C ومعامل الحث لكل ناقل C'، ما هي إشارة كل منهما؟

ب. كيف تصبح C و C' عندما تصبح d كبيرة جدا؟

الحل

أ. النواقل الثلاثة متشابهة، بالتالي تكون معاملات السعة متشابهة (ش: 35- VII).

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C$$



و بما أن الجملة متناظرة فإن:

$$C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = C'$$

➢ نسمي V_1 و V_2 و V_3 كمونات الكرات الناقلة الثلاث على الترتيب.

لدينا بالنسبة للناقل الأول:

$$Q_1 = C V_1 + C' V_2 + C' V_3 = C V_1 + C'(V_2 + V_3)$$

التمرين 08:

كرتان ناقلتان S_1 و S_2 نصفي قطريهما R_1 و R_2، البعد بين مركزيهما o_1 و o_2 $(o_1o_2 = d)$ كبير جدا أمام نصفي قطريهما، لدرجة أنه يمكن إهمال ظواهر التأثير المتبادل بينهما أنظر الشكل (ش: 31– VII).

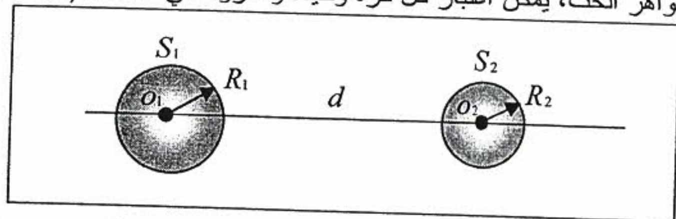
أ. تحمل الكرة S_1 بداية شحنة Q_1 بينما S_2 متعادلة كهربائيا $(Q_2 = 0)$، جد كموني الكرتين V_1 و V_2.

ب. تربط الآن الكرتين بسلك ناقل مهمل السعة, جد كمون الكرتين V' وشحنتيهما Q'_1 و Q'_2 بدلالة Q_1 و R_1 و R_2.

ج. أحسب الكثافتين السطحيتين للشحنة σ'_1 و σ'_2 المحمولتين على سطحي الكرتين، ثم استنتج النسبة $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_2}$، ما ذا يمكن استنتاجه من هذه النتيجة؟

الحل

أ. باهمال ظواهر الحث، يمكن اعتبار كل كرة وحيدة ومعزولة في الفضاء (ش: 33– VII).



$Q_1 = C_1V_1 \quad et \quad Q_2 = C_2V_2$

$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \Rightarrow V_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$ ، $Q_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 0$

ب. عند ربط الكرتين الناقلتين بسلك ناقل، تصبح تشكلان ناقلا وحيدا كمونه:

$V'_1 = V'_2 = V'$

بما أن جملة الكرتين معزولة، الشحنة الكلية محفوظة: $Q'_1 + Q'_2 = Q_1$

$Q'_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V' \; et \quad Q'_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V' \Rightarrow 4\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)V' = Q_1$

و بالتالي: $V' = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)}$

و منه: $Q'_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} Q_1$ و $Q'_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} Q_1$

ج. الكثافتين الشحنيتين للسطحين الكرويين:

$\sigma'_1 = \dfrac{Q'_1}{4\pi R_1^2}$ و $\sigma'_2 = \dfrac{Q'_2}{4\pi R_2^2}$

و بالتالي: $\sigma'_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi R_1 (R_1 + R_2)}$ و $\sigma'_2 = \dfrac{Q_1}{4\pi R_2 (R_1 + R_2)}$

و منه: $\dfrac{\sigma'_1}{\sigma'_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$

فعل الرؤوس الحادة: الكثافة الشحنية تكون أكبر عند الرؤوس الحادة أو الأسطح ذات أنصاف أقطار الإنحناء الأصغر $(R_1 > R_2 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2)$, وبالتالي يكون الحقل الكهربائي عند نقطة قريبة من السطح أشد " نظرية كولوم".

التمرين 09:

توضع كرتي التمرين السابق (ت.7) (S_1 و S_2) نصفي قطريهما R_1 و R_2، البعد بين مركزيهما o_1 و o_2 $((o_1o_2 = d)$ الآن في وضعية الحث أو التأثيرالمتبادل. نعتبر أن: R_1 و R_2 $<< d$ بحيث يمكن اعتبار أن توزيع الشحنة على كل ناقل يبقى ثابتا، نرمز بـ Q_1 و Q_2 لشحنتي الناقلين عند التوازن:

أ. جد بدلالة Q_1 و Q_2 كموني الناقلين V_1 و V_2.

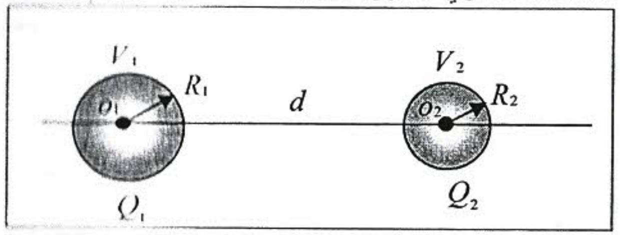
ب. استنتج عبارتي Q_1 و Q_2 بدلالة V_1 و V_2.

ج. حدد معاملات السعة والتأثير للجملة وجد إشاراتها.

د. كيف تصبح النتائج السابقة إذا كانا R_1 و R_2 مهملين أمام d.

الحل

أ. الكرة S_1 تشكل حجما لتساوي الكمون، كمونها مثلا عند o_1: V_1 (ش: 34– VII).



هذا الكمون يمكن اعتباره ناتج عن توزيعين:

➢ التوزيع السطحي للشحنة Q_1 المحمولة على سطح الكرة S_1 و الواقعة على بعد R_1 من o_1:

بطريقة مماثلة يمكن استنتاج بالنسبة لبقية الناقلين:

$$Q_2 = C\,V_2 + C'(V_1+V_3)$$
$$Q_3 = C\,V_3 + C'(V_1+V_2)$$

➢ الناقل المتوازن يشكل حجما لتساوي الكمون، فكمون كل ناقل هو هفسه الكمون عند مركــزه،

من نتائج التمارين السابقة، يمكن كتابة كمونات النواقل الثلاثة كما يلي:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{d} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{d} \\ V_2 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{d} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R} + \dfrac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{d} \\ V_3 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{d} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{d} + \dfrac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R} \end{cases}$$

و بالتالي:

$$\begin{cases} Q_1 d + Q_2 R + Q_3 R = 4\pi\varepsilon_0 R d V_1 \\ Q_1 R + Q_2 d + Q_3 R = 4\pi\varepsilon_0 R d V_2 \\ Q_1 R + Q_2 R + Q_3 d = 4\pi\varepsilon_0 R d V_3 \end{cases}$$

بحل جملة المعادلات بطريقة المحددات "كريمر" مثلا:نجـد عبـارة إحـدى الـشحنات الـثلاث Q_1 وQ_2 وQ_3 بدلالة الكمونات الثلاثة V_1 وV_2 وV_3

$$Q_1 = \frac{\Delta_{Q1}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4\pi\varepsilon_0 R d & R & R \\ 4\pi\varepsilon_0 R d & d & R \\ 4\pi\varepsilon_0 R d & R & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & R & R \\ R & d & R \\ R & R & d \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0 R d}{d^2 + Rd - 2R^2}\left[(d+R)V_1 - RV_2 - RV_3\right]$$

بمطابقة هذه المعادلة بالمعادلة ↺ نجد:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R\, d(R+d)}{d^2 + Rd - 2R^2} \quad \text{و} \quad C' = -\frac{4\pi\varepsilon_0 R^2 d}{d^2 + Rd - 2R^2}$$

و بما أن $d > R$ يمكن إثبات أن: $C > 0$ و $C' < 0$

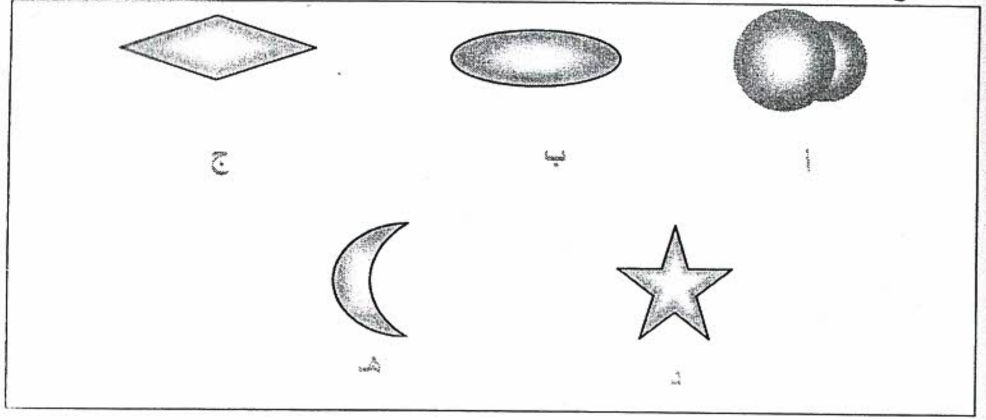
ب. في حالة $d >> R$، تهمل ظواهر الحث أو التأثير ومنه:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \text{ و } C' = 0$$

تمارين للحل

التمرين 01:

بين توزيع كثافة الشحنة على سطوح النواقل الأتية (ش: 36- VII): ، ثم أرسم خطوط الحقل وسطوح تساوي الكمون في كل حالة.



التمرين 02:

نصفي كرتين لهما نفس نصف القطر $R = 15cm$، يوصلان ليشكلان كرة ناقلة S ، تبعد الكرة عن أي تأثير خارجي، وتوصل بالكمون $V = -270kV$ ، نذكر بأن:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \approx 36\pi 10^9\,SI$$

1. أحسب الشحنة الكلية Q للكرة S.
2. أحسب الحقل عند نقطة خارجية وقريبة من سطح الكرة ثم حدد خصائص هذا الحقل.
3. جد شدة القوة الكهروستاتيكية الناشئة بين نصفي الكرتين بدلالة ε_0 و V.

التمرين 03:

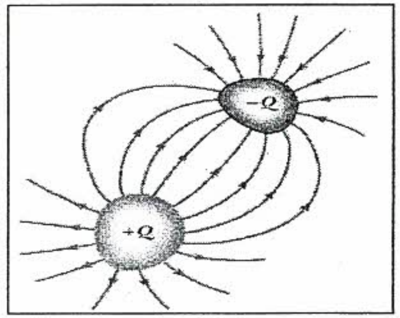
قرص معدني رقيق جدا، مركزه o ونصف قطره R يحمل على وجهيه شحنات كهربائية ذات كثافة شحنية سطحية، تعطى عند نقطة M تبعد مسافة r عن مركزه بالعلاقة:

$\sigma(M) = \sigma_0 \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}$، حيث ثابت.

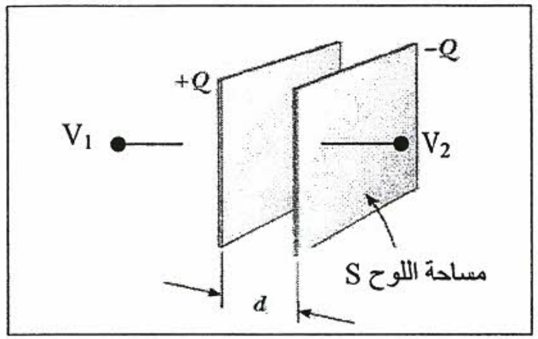
أ. احسب الشحنة الكلية المحمولة على وجهي القرص.

3.VIII تعريف المكثفة

المكثفة عنصر له القدرة على تكثيف وتخزين الشحنة الكهربائية، هذا العنصر له أشكال وأحجام مختلفة. تتكون المكثفة من ناقلين في حالة حث كلي (يحملان شحنتين متساويتين في المقدار ومختلفتين في الإشارة)، هذين الموصلين يسميان بلوحي المكثفة –اللوح الداخلي واللوح الخارجي (ش VIII–1) يتولد بين لوحي المكثفة فرق في الكمون $(U = V_1 - V_2)$. يمكن أن يكون الفضاء بين لوحي المكثفة فراغا أو وسطا عازلا. للمكثفات تطبيقات عملية مهمة وعديدة أهمها: تخزين الطاقة الكهربائية الكامنة وترشيح ترددات الإشارات وتشكيل الدارات الرنانة مع المقاومات والوشائع.



أبسط أشكال المكثفات، هي المتكونة من لوحين ناقلين ومتوازيين، مساحة اللوح الواحد هي S ، البعد بينهما هو d (ش VIII–2).



- كموني اللوحين على الترتيب: V_1, V_2.
- نسمي شحنة المكثفة، شحنة اللوح الداخلي Q.
- بسبب الحث (التأثير) الكلي بين اللوحين، تكون الشحنة على السطح الداخلي للموصل الثاني C_2 تساوي$(-Q)$ وعلى السطح الخارجي Q' حيث شحنة الموصل الثاني: $Q_2 = -Q + Q'$
تمثل المجموع الجبري للشحنة على سطحه.
- شحنة المكثفة Q تتناسب طرديا مع فرق الكمون بين لوحيها.

$$Q \propto (V_1 - V_2) \quad \Rightarrow \quad Q = C(V_1 - V_2)$$

حيث C : السعة الكهربائية للمكثفة وهي تمثل النسبة بين شحنتها وفرق الكمـــون بـــين قطبيها ، وهي دوما موجبة، وتقاس بالفاراد.

4.VIII حساب سعة مكثفة

لحساب سعة مكثفة ما، شحنتها Q، نتبع الخطوات الآتية:

أ. حساب الحقل بين لوحي المكثفة:

من أجل ذلك نطبق نظرية غوص:

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

ب. حساب الفرق في الكمون بين لوحيها:

نحسب تجوال الحقل بين السطحين المتقابلين لإيجاد فرق الكمون بينهما:

$$dV = -\vec{E}.\vec{dr} \quad \Rightarrow V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.\vec{dr}$$

ج. إستنتاج السعة:

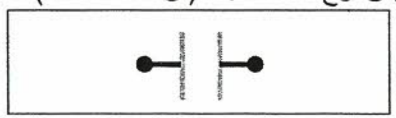
وذلك بحساب النسبة:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U} \qquad \text{[VIII-1 م]}$$

التي تمثل سعة المكثفة.

ملاحظات:

- يرمز للمكثفات " مهما يكن نوع المكثفة" بـ (ش: 3 – VIII):



- إذا كان الفراغ المحصور بين لوحي المكثفة مملوء بعازل سماحيته النسبية ε ($\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$) حيث $\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon$ تسمى النفاذية المطلقة للعازل أو ثابت العزل) فإن السعة C في حالة الفراغ تصبح C_r بوجود العازل،حيث:

$$C_r = \varepsilon_r C \qquad \text{[VIII-2: م]}$$

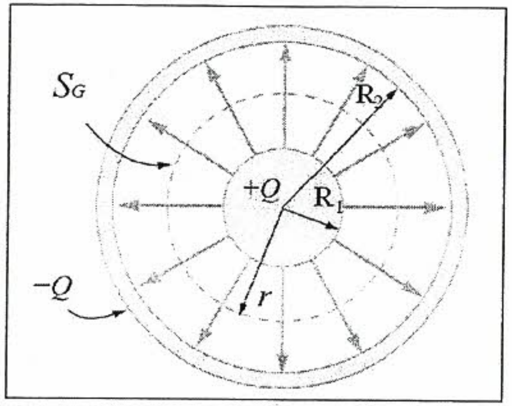
إذا كان العازل جيدا (مثاليا) فإن $\varepsilon_r >> 1$ (مثلا: $\varepsilon_r > 1000$)، وبالتالي يمكن تحقيق مكثفات ذات سعات عالية $(C_r >> C)$

5.VIII أنواع المكثفات

للمكثفات أشكال عديدة، أشهرها: المكثفات الكروية والأسطوانية والمستوية، وكما سنرى فالسعة تعتمد على الشكل الهندسي للمكثفة.

5.أ. المكثفات الكروية:

لوحي المكثفة عبارة عن كرتين ناقلتين متّحدتي المركز، نصفي قطريهما R_1 و R_2 $(R_2 > R_1)$ على الترتيب (ش: 4 – VIII).



Q_1: شحنة المكثفة (شحنة اللوح الداخلي).
V1: كمون اللوح الداخلي
V2: كمون اللوح الخارجي.
Q_1': هي الشحنة المحتثة على السطح الداخلي للكرة الخارجية، حيث:
$Q_1' = -Q_1$ (حث كلي).

لحساب سعة المكثفة نحسب أولا الحقل بين لوحي المكثفة، ثم نجد تجوال الحقل بين اللوحين لإيجاد فرق الكمون بينهما.

- حساب الحقل: تناظر الجملة تناظرا كروي، إذن بتطبيق نظرية غوص ($R_2<r<R_1$):

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q_1}{E_0} \Rightarrow E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

➢ تجوال الحقل:

$$dV = -Edr \Rightarrow V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} Edr$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = \int_{R1}^{R2} \frac{Q_1 dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

وبما أن:

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_{1'}}{U}$$

إذن:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$: [م VIII-3]

ملاحظـــة:

يمكن زيادة سعة المكثفة الكروية

• بوضع عازل جيد بين اللوحين نفاذيته النسبية ε_r:

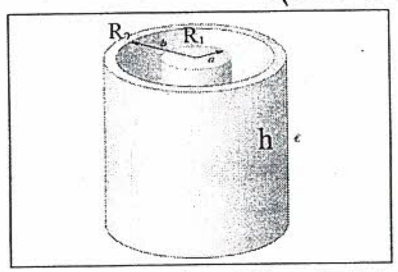
$$C_r = \varepsilon_r C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$= 4\pi\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$ [م: VIII − 4]

• أو بإنقاص المسافة الفاصلة بين اللوحين (R_1 و R_2).

5.ب.المكثفة الأسطوانة:

لوحي المكثفة عبارة عن أسطوانتين ناقلتين متحدتي المحور (Coaxiaux)، نصفي قطريهما R_2, R_1 وارتفاعها h (ش: VIII − 5).



Q_1: شحنة الأسطوانة الناقلة الداخلية و V_1 كمونها.

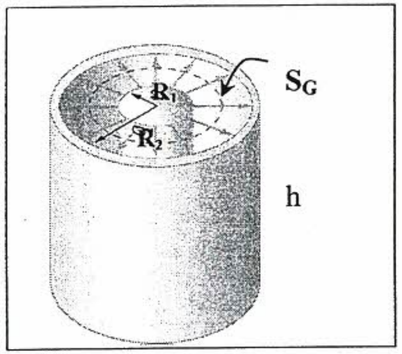
V_2: كمون الناقل الأسطواني الخارجي.

Q'_1: للشحنة على السطح الداخلي للأسطوانة الخارجية وبسبب الحث الكلي فإنها

تساوي Q_1- ($Q'_1 = -Q_1$).

لحساب سعة المكثفة الأسطوانية، نطبق نظرية غوص أولا:

➢ سطح غوص أسطوانة نق $R_1 < r < R_2$ وارتفاعها h (ش: VIII − 6).



$$\Phi = \oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum qi}{\varepsilon_0}$$

$$E.2\pi rh = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 h} \cdot \frac{1}{r}$$

➢ تجوال الحقل:

$$dV = -Edr \Rightarrow \int_{V1}^{V2} dV = -\int_{R1}^{R2} Edr$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

وبما أن:

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2}$$

فإن:

$$C = 2\pi 6h / \ln\frac{R_2}{R_1}$$ [م: VIII − 5]

ملاحظـــة:

يمكن زيادة سعة المكثفة الأسطوانية:

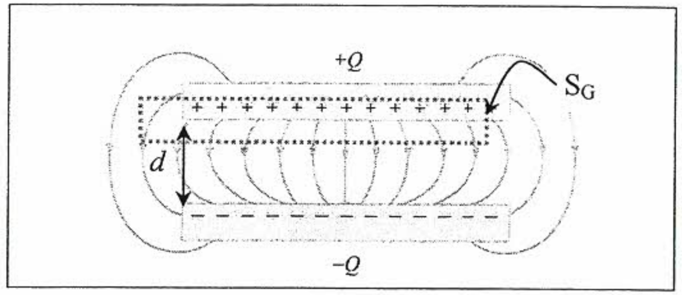
• بوضع عازل جيد بين لوحي المكثفة نفاذيته النسبية ε_r:

$$\ln\frac{R_2}{R_1} / \varepsilon_0 h \varepsilon_r C = 2\pi\varepsilon_r C_r = = \ln\frac{R_2}{R_1} / \varepsilon h 2\pi$$ [م: VIII − 6]

• أو بإنقاص المسافة الفاصلة بين اللوحين R_1 وR_2).

5.ج. المكثفة المستوية:

لوحي المكثفة عبارة عن لوحين متوازيين لا نهائيين معزولين عن بعضهما بمسافة d صغيرة جدا، في حالة حث كلي (ش: 7 – VIII).



➢ حسب نظرية كولوم [م: 5–VII]، الحقل قرب سطح الموصل يساوي $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ واتجاهه من الكمون العالي V_1 نحو الكمون المنخفض V_2.

➢ تجوال الحقل

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.\vec{dr} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^d dr = \frac{\sigma . d}{\varepsilon_0}$$

لكن $\sigma = \frac{q}{S}$ ومنه فرق الكمون:

$$U = V_1 - V_2 = q.\frac{d}{S\varepsilon_0}$$

وبالتالي سعة المكثفة المستوية هي:

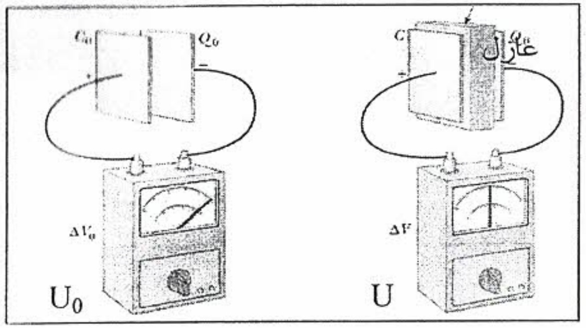
$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{S\varepsilon_0}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \qquad [\text{VIII} - 7 :\text{م}]$$

ملاحظات:

☜ يمكن زيادة سعة المكثفة المستوية بإحدى الطرائق الآتية:

• بوضع عازل جيد بين لوحي المكثفة نفاذيته النسبية ε_r (ش: 8 – VIII).

$$C_r = \varepsilon_r C = \varepsilon_r \varepsilon_0 . \frac{S}{d} \qquad [VIII - 8 :\text{م}]$$



• أو بزيادة مساحة السطحين المتقابلين S.

• أو بإنقاص المسافة الفاصلة بين للوحين.

☜ تتحمل كل مكثفة كمون أعظمي U_{Max} يعتمد على المسافة بين اللوحين ونوع العازل بينهما يسمى كمون الإنفصام (tension de calquage)، إذا زاد فرق الكمون بين لوحي المكثفة عن هذه القيمة العظمى تحدث شرارة كهربائية بين اللوحين مما يؤدي إلى إتلافها.

☜ إضافة عازل بين لوحي مكثفة يرفع من قيمة كمون انفصامها.

☜ يمكن قياس ثابت العازل ε_r بين لوحي مكثفة بقياس سعة المكثفة C قبل وبعد ملء الفراغ بين لوحيها بهذا العازل C_r ($\varepsilon = C_r/C$).

6.VIII قوة التجاذب بين لوحي مكثفة

يحمل لوحي المكثفة القريبين من بعضهما البعض شحنتين متساويتين في المقدار ومختلفتين في الإشارة $+Q$ و $-Q$، تنشأ قوة تجاذب بين هذين اللوحين. يمكن اعتبار أن الحقل الكهربائي منتظم بين لوحي المكثفة إذا كانت المسافة صغيرة بينهما. لحساب قوة التجاذب هذه يمكن الإعتماد على مفهوم الضغط الكهروستاتيكي.

☜ إذا كانت S هي مساحة لوح المكثفة، الكثافة الشحنية السطحية على الوجهين الداخليين هي: $\pm\sigma = \pm Q/S$ ، يعطى الحقل المنتظم بين لوحي المكثفة **بعلاقة كولوم** [م: 5-VII]: $E = \sigma/\varepsilon_0$.

☜ الضغط الكهروستاتيكي على السطح الداخلي المشحون يعطى بالعلاقة [م: VIII – 13]

$$P_e = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\sigma E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

إذن قوة التجاذب بين لوحي المكثفة:

$$F = PS = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S = \frac{(Q/S)^2}{2\varepsilon_0}S = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \qquad [م: VIII-9]$$

ملاحظة:

☜ نلاحظ أن القوة مستقلة عن البعد بين لوحي المكثفة d.

☜ إذا كانت المكثفة موصولة بمولد كمون V ، نعوض Q بدلالة V:

$$Q = CV, \quad C = \varepsilon_0\frac{S}{b}$$

إذن:

$$F = \frac{(CV)^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2b^2}S \qquad [م: VIII-10]$$

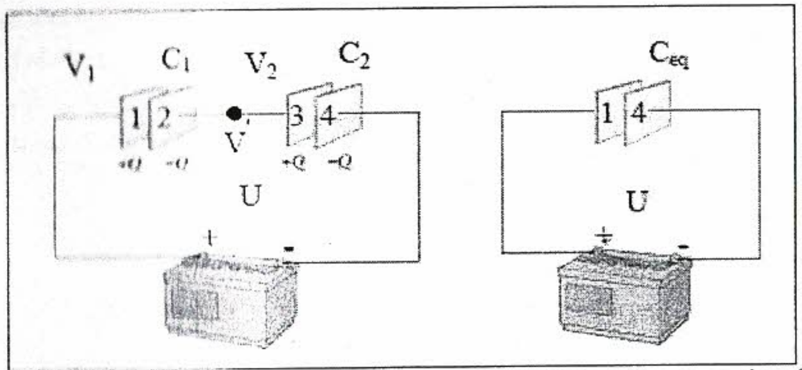
7.VIII ربط المكثفات

تربط المكثفات مع بعضها بغرض الحصول على مكثفات ذات سعات غير متوفرة صناعيا، يمكن تكييف قوانين كيرشوف في حساب السعات المكافئة.

يوجد نوعان أساسيان لربط المكثفات.

1.7: الربط على التسلسل:

أ. حالة مكثفتين: (ش: 9 – VIII)



نلاحظ أن الألواح الفردية تحمل شحنة +Q

بينما الألواح الزوجية تحمل شحنة Q–

وذلك أنه عند شحن اللوح 1 بشحنة Q وبسبب الحث الكلي بين الألواح تظهر شحنات محتثة متساوية في المقدار ومختلفة في الإشارة لشحنة اللوح الأول(قاعدة كيرشوف الأولى).

كمون اللوح الأول V_1 واللوح الرابع V_2 وكمون اللوح المشترك (اللوحين 2،3) هو V'. لكل مكثفة (لوحين) تصح المعادلة:

$$V_1 - V_2 = (V_1 - V') + (V' - V_2)$$

$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{C_{eq}}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad [م: VIII – 11]$$

ب. تعميم: يمكن تعميم النتيجة السابقة إلى n مكثفة مربوطة على التسلسل.

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+.....+\frac{1}{C_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i} \qquad [\text{VIII} - 12 \text{ :م}]$$

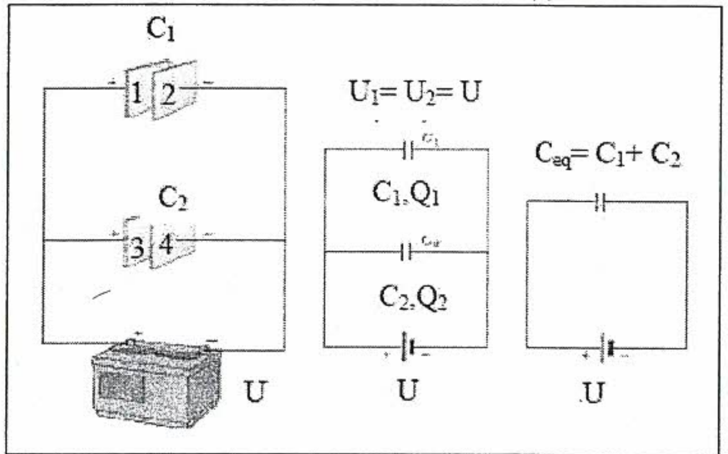
ملاحظات:

في حالة الربط على التسلسل، يكون للمكثفين نفس الشحنة، بينما فرق الكمون بين لوحيهما مختلف.

2.7: ربط المكثفات على التوازي:

أ. حالة مكثفين (ش: 10 – VIII).

في هذه الحالة فرق الكمون نفسه بين المكثفين،بينما شحنتيهما مختلفتين (اللوحين 1 و3 نفس الكمون V_1، واللوحين 2 و4 لهما نفس الكمون V_2) بينما شحنتيهما الأولى Q_1 والثانية Q_2 وشحنة المكثفة المكافئة تساوي(قاعدة كيرشوف الثانية):



$Q= Q_1 + Q_2$

حيث: $Q_1 = C_1 (V_1 – V_2)$

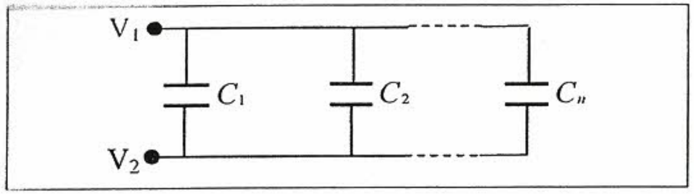
$Q_2 = C_2 (V_1 – V_2)$

ومنه:

$Q= Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) (V_1 – V_2) = C_{eq} (V_1 – V_2)$

إذن: $C_{eq} = C_1 + C_2$ $\qquad$ [VIII –13 :م]

ب. تعميم N مكثفة مربوطة على التوازي (ش: 11– VIII).



نلاحظ أن الألواح العليا مربوطة بالكمون V_1 بينما الألواح السفلى مربوطة بالكمون V_2. المكثفة المكافئة في هذه الحالة:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + ...+ C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad [\text{VIII} – 14 \text{ :م}]$$

ملخص

السعات

الجملة	سعتها
كرة معزولة نصف قطرها R " الفصل السابع"	$C = 4\pi\,\varepsilon_0 R$
مكثفة كروية نصف قطرها الداخلي R_1 والخارجي R_2	$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$
مكثفة أسطوانية طولها h نصف قطرها الداخلي R_1 والخارجي R_2	$\ln\frac{R_2}{R_1} / \varepsilon_0 h\, C = 2\pi$
مكثفة مستوية سطحها S والبعد بين لوحيها d	$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$

عند استبدال الفراغ بين لوحي المكثفة بعازل نفاذيته النسبية ε_r، فإن سعتها تزداد بمعامل ε_r ($C_r = C\varepsilon_r$).

قوة التجاذب بين لوحي مكثفة:

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2b^2} S$$

ربط المكثفات " المكثفة المكافئة"

- الربط على التسلسل

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

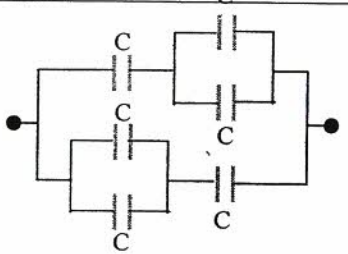
- الربط على التوازي

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$$

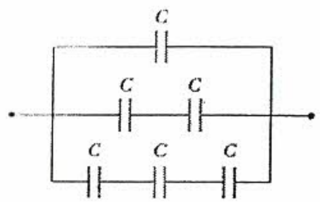
تمارين محلولة

التمرين 01:

جد المكثفة المكافئة في التركيبتين الآتيتين (ش: 12– VIII).



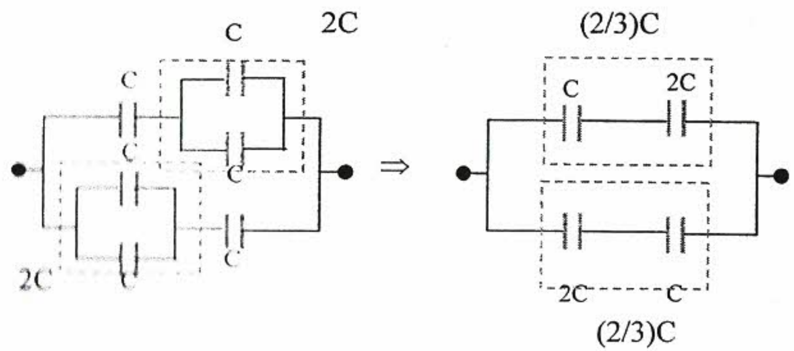
أ



ب

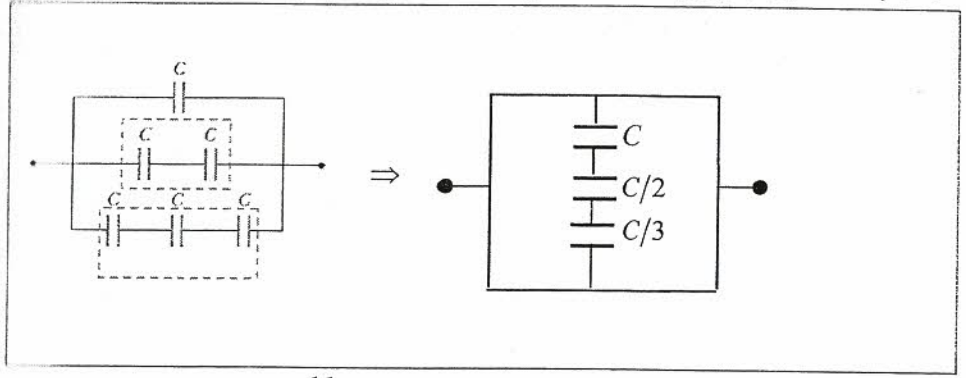
الحل

أ. بالإعتماد على قوانين ربط المكثفات على التسلسل وعلى التوازي



$$\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{3}{2C} + \frac{3}{2C} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C}{3}$$

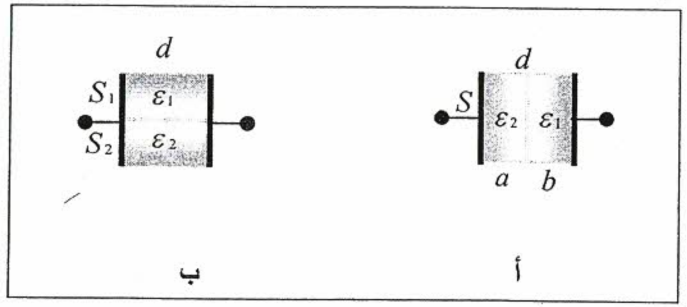
ب. بالإعتماد على قوانين ربط المكثفات على التسلسل وعلى التوازي



$$C_{eq}=C+C/2+C/3=\frac{11}{6}C$$

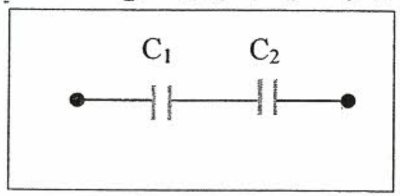
التمرين 02:

جد سعة المكثفة المكافئة في الأشكال الآتية (ش: 13– VIII). حيث $i=1,2$ ε_i: هي ثابت العازل أو النفاذية المطلقة للمادة.



الحل

أ. المكثفة المركبة في الشكل أ والمملوءة بعازلين تكافئ الشكل الآتي (ش: 14 – VIII).



أي مكثفتين مستويتين مربوطتين على التسلسل:

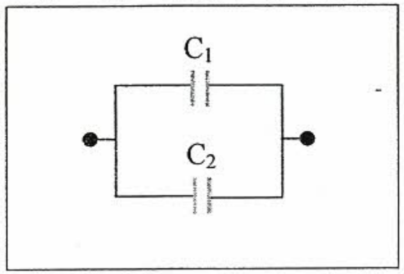
$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\Rightarrow C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

حيث:
$$C_1=\varepsilon_1\frac{S}{a},\quad \varepsilon_1=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}$$

و:
$$C_2=\varepsilon_2\frac{S}{b},\quad \varepsilon_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}$$

و بالتالي سعة المكثفة المكافئة:
$$C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 b+\varepsilon_2 a}S$$

ب. المكثفة المركبة في الشكل **ب** والمملوءة بعازلين تكافئ الشكل الآتي (ش: 15 – VIII).

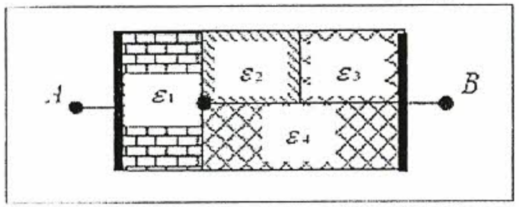


أي مكثفتين مستويتين مربوطتين على التوازي:

$$C_{eq}=C_1+C_2$$
$$=\varepsilon_1\frac{S_1}{d}+\varepsilon_2\frac{S_2}{d}=(\varepsilon_1S_1+\varepsilon_2S_2)\frac{1}{d}$$

التمرين 03:

في الدارة الآتية $C_1=3C, C_2=C\ , C_3=2C\ , C_4=3C$ مربوطة حسب الشكل الآتي (ش: 16–VIII):



أ. أرسم شكلا مكافئا بدلالة سعات المكثفات للتركيبة السابقة.

ب. جد بدلالة C السعة المكافئة بين القطبين A و B (تطبيق عددي: $C=2\mu F$).

ج. نجعل الكمون بين القطبين A و B $V_{AB}=2000V$، أحسب شحنة كل مكثفة والكمون بين طرفيها.

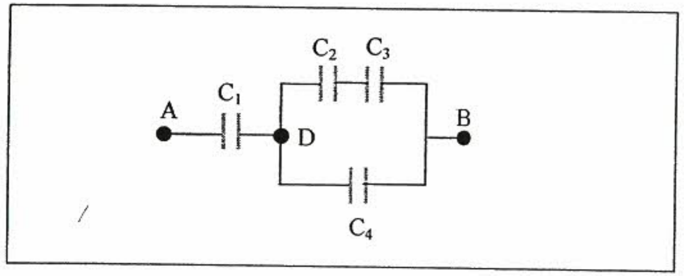
د. نستبدل الفرع الذي يضم المكثفتين C_2 و C_3 بمكثفة مكافئة x.

1. من أجل أية قيمة لسعة المكثفة x تكون السعة المكافئة بين القطبين تساوي السعة x نفسها؟

2. أحسب إذا شحنات المكثفات ذات السعات C_1، x، C_4.

الحـــل

أ. الشكل المكافئ للتركيبة (ش: VIII- 17)



ب. السعة المكافئة بين القطبين A و B:

$$\frac{1}{C_{AB}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{DB}},\quad C_{DB}=C_4+\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}=\frac{11}{3}C$$

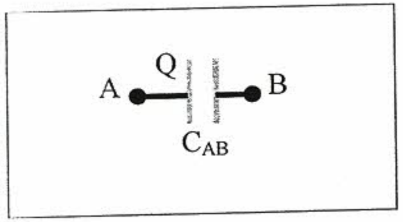
بعد التعويض والتبسيط نجد:

$$C_{AB}=\frac{33}{20}C$$

ت.ع:

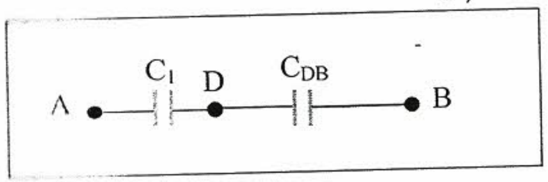
$$C_{AB}=\frac{33}{20}C=\frac{33}{20}.2=3,3\mu F$$

ج. شحنة المكثفة المكافئة بين القطبين A و B:



$$Q=C_{AB}V_{AB}=\frac{33}{20}CV_{AB}$$

يمكن تبسيط الدارة كما يلي (ش: VIII-18):



➢ شحنة المكثفة C_1:

$$Q_1=Q=\frac{33}{20}CV_{AB}$$

• كمونها:

$$V_{AD}=V_1=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{Q_1}{3C}=\frac{11}{20}V_{AB}$$

➢ كمون المكثفة C_4:

$$V_{AB}=V_1+V_{DB}=V_1+V_4\Rightarrow V_4=V_{AB}-V_1$$

إذن:

$$V_4=V_{AB}-\frac{11}{20}V_{AB}=\frac{9}{20}V_{AB}$$

• شحنتها:

$$Q_4=C_4V_4=3C\frac{9}{20}V_{AB}=\frac{27}{20}CV_{AB}$$

➢ لكن المكثفتين C_2 و C_3 على التسلسل إذن: $Q_2=Q_3$ (حث كلي)، بالتالي: $C_2V_2=C_3V_3$

من جهة أخرى:

$$V_4=V_2+V_3$$

إذن:

$$V_3=V_4-V_2\Rightarrow C_2V_2=C_3(V_4-V_2)\Rightarrow V_2=\frac{C_3}{C_2+C_3}V_4=\frac{3}{10}V_{AB}$$

$$V_1 = V_4 - V_2 = \frac{9}{20}V_{AB} - \frac{3}{10}V_{AB} = \frac{3}{20}V_{AB}$$

و منه:

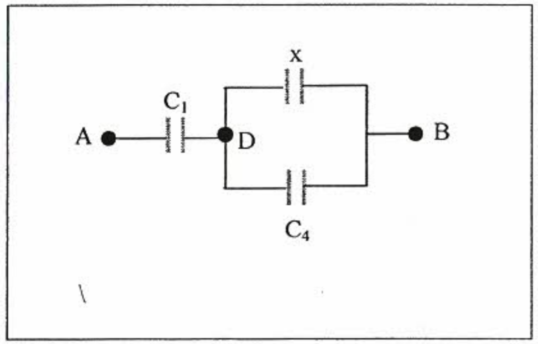
$$Q_2 = C_2V_2 = C.\frac{3}{10}V_{AB} = \frac{3}{10}CV_{AB}$$

$$Q_3 = C_3V_3 = 2C.\frac{3}{20}V_{AB} = \frac{6}{20}CV_{AB}$$

ت.ع.

	C_1	C_2	C_3	C_4
Q(mC)	6,6	1,2	1,2	5,4
V(Volts)	1100	600	300	900

د. الدارة المكافئة (ش:19- VIII).



1) السعة المكافئة بين النقطتين D و B:

$$C_{DB} = C_4 + x$$

2) السعة المكافئة بين النقطتين A و B إذا:

$$C_{AB} = \frac{C_1C_{DB}}{C_1 + C_{DB}} = \frac{C_1(C_4 + x)}{C_1 + C_4 + x} = x$$

بضرب الطرفين في الوسطين وتبسيط العبارة، نجد معادلة من الدرجة الثانية:

$$x^2 + C_4x - C_1C_4 = 0$$

الحل الرياضي المقبول فيزيائيا هو الجذر الموجب:

$$x = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}C$$

3) شحنات المكثفات C_1, x, C_4 .،

شحنة المكثفة المكافئة: $Q = xV_{AB}$ وهي نفسها شحنة المكثفة C_1. إذا كانت q شحنة المكثفة x فإن Q-q هي شحنة المكثفة C_4.

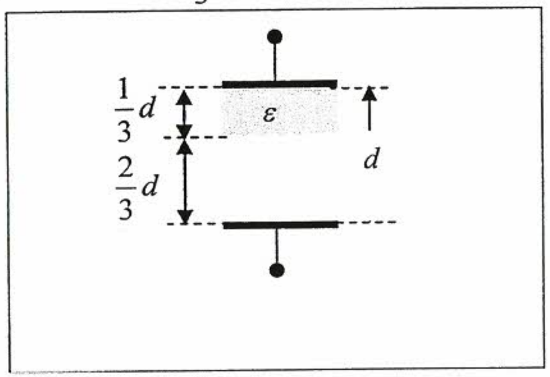
$$V_{DB} = \frac{q}{x} = \frac{Q-q}{C_4} = \frac{Q}{x + C_4} = \frac{xV_{AB}}{x + 3C}$$

يمكن استنتاج أن:

$$q = \frac{x^2V_{AB}}{x + 3C}, \qquad Q - q = \frac{3Cx}{x + 3C}V_{AB}$$

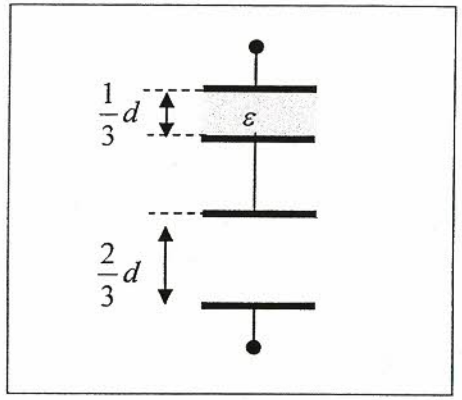
التمرين 04:

مكثفة مستوية المسافة بين لوحيها، سعتها في حالة غياب العازل بين لوحيها " حالة الفراغ" C_0. كيف تصبح سعتها إذا أدخل لوح عازل سمكه $\frac{1}{3}d$ وثابت عزله ε (ش: 20- VIII).



الحل

التركيبة تكافئ مكثفتين مربوطتين على التسلسل (ش: 21- VIII).



من العلاقتين [م : 7 - $VIII$] و[م : 8 - $VIII$] نجد:

$$C_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d/3}$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{2d/3}$$

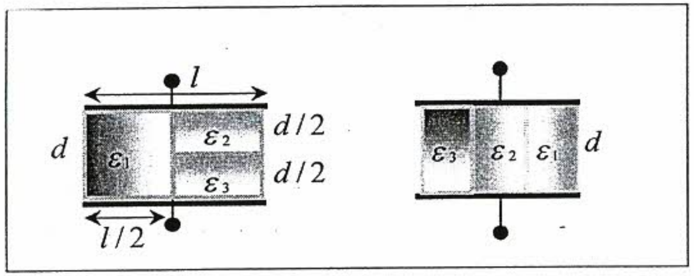
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \left(\frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}\right)\frac{\varepsilon_0}{d}S$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \left(\frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}\right)C_0$$

تمارين للحل

التمرين 01

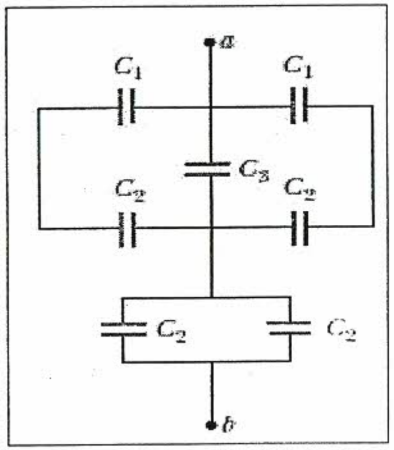
جد السعات المكافئة للمكثفات المركبة الآتية (ش: 24-VIII) والمتكونة من مزج عدة عوازل.



اعتبر $l >> d$

التمرين 02

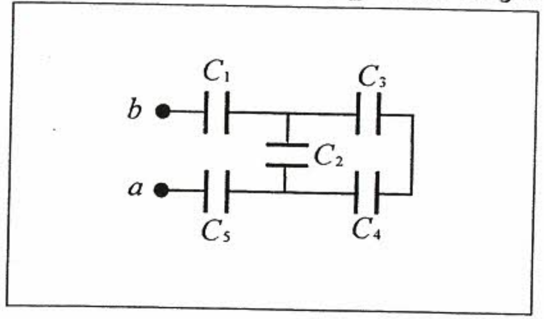
جد السعة المكافئة لمجموعة المكثفات المربوطة بين القطبين a و b في الشكل الآتي (ش: VIII-25).



إذا كانت: $C_3 = 2\mu F, C_2 = 10\mu F, C_1 = 5\mu F$

التمرين 03:

في الدارة الآتية (ش: 22 -VIII): $C_1 = C_5 = 8.4\mu F$ و $C_2 = C_3 = C_3 = 4.2\mu F$،
الكمون بين القطبين a و b: $V_{ab} = 220V$

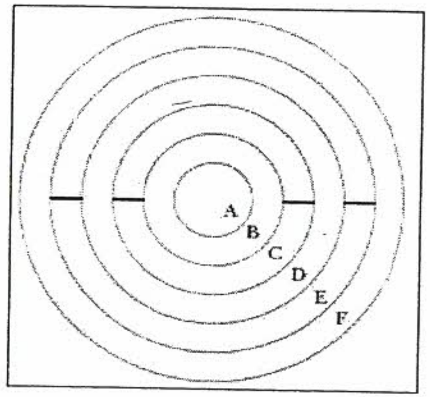


أ. جد سعة المكثفة المكافئة بين القطبين a و b

ب. جد شحنة كل مكثفة والكمون بين طرفيها.

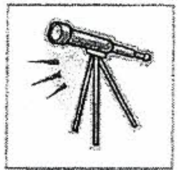
التمرين 04:

ستة كرات متحدة المركز F و A, B, C, D, E أنصاف أقطارها
6R و R,. 2R, 3R, 4R, 5R على الترتيب.



الكريتين B و C مربوطتين بسلك ناقل وكذلك الكريتين D وE(ش: 22 -VIII)، جد السعة المكافئة لهذه الجملة.

9 الطاقة الكهروستاتيكية



الأهداف

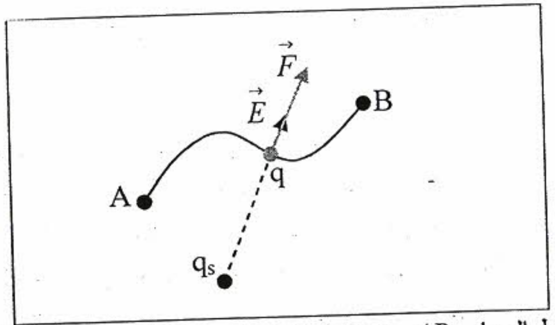
- الطاقة الكهروستاتيكية - الكامنة- لشحنة نقطية موضوعة في حقل كهربائي خارجي.
- الطاقة الكامنة المتبادلة بين مجموعة من الشحنات النقطية.
- الطاقة الكامنة لثنائي قطب.
- الطاقة الكامنة لتوزيع شحني مستمر.
- الطاقة الكامنة المخزنة في ناقل مشحون.
- الطاقة الكامنة المخزنة في مكثفة.
- مفهوم كثافة الطاقة

1.IX مقدمة

تعرفنا في الفصول السابقة على بعض المقادير الكهروستاتيكية المتعلقة بالشحنات الكهربائية: كالقوة والحقل والكمون، نتعرف في هذا الفصل على مفهوم الطاقة الكهروستاتيكية، وهي طاقة كامنة، أي أنها مرتبطة بموضع الشحنات الكهربائية داخل حقل كهروستاتيكي.

2.IX الطاقة الكامنة لشحنة نقطية في حقل كهروستاتيكي

تنتقل الشحنة النقطية q في حقل كهربائي ناشئ عن شحنة منبع q_s بين النقطتين A و B [ش: 1 − X].



عند كل نقطة من نقاط المسار AB ، ترتبط القوة الكهروستاتيكية بالحقل بالعلاقة:

$$\vec{F} = q\,\vec{E} \qquad [\text{م: } 3- \text{III}]$$

عمل القوة $\vec{F}$ يكتب كما يلي:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = q\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} \qquad [\text{م: } 1- \text{IX}]$$

التكامل: $\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl}$ يمثل تجوال الحقل عبر المسار المنحني AB، ويساوي الفرق في الكمون بين نقطتي البداية A والنهاية B. (أنظر فصل الكمون الكهروستاتيكي).

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

إذن عمل القوة الكهروستاتيكية:

$$W_{AB} = q\left[V_A - V_B\right] = qV_A - qV_B \qquad [\text{م: } 2- \text{IX}]$$

من المعادلة [م: 2 − IX] عمل القوة الكهروستاتيكية (قوة محافظة أو مركزية) لنقل شحنة نقطية q بين نقطتين A و B يساوي الفرق في الطاقة الكامنة بين هذين النقطتين و لا يعتمد على طبيعة المسار.

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \Delta E_P = E_{PA} - E_{PB} \\ &= qV_A - qV_B \\ &= K\frac{qq_s}{r_A} - \frac{qq_s}{r_B} = \frac{qq_s}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{qq_s}{4\pi\varepsilon_0 r_B} \end{aligned} \qquad [\text{م: } 3- \text{IX}]$$

و بالتالي تعرف الطاقة الكامنة لشحنة نقطية q موضوعة عند نقطة M، حيث الكمون V، بأنها العمل اللازم لنقل هذه الشحنة من النقطة M إلى ما لا نهاية. من العلاقتين [م: IX −2] و[م: IX −3] وباعتبار الكمون معدوم في الما لا نهاية:

$$E_p = W_{M\to\infty}(q : M \to \infty) = q[V_n - V_\infty]$$

$$= qV = \frac{qq_s}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad [\text{م: } IX - 4]$$

هذه العلاقة جبرية، ويمكن أن تكون الطاقة الكامنة موجبة أو سالبة.

ملاحظات:

- عبارة الطاقة الكامنة [م: IX − 4] يمكن اعتبارها:
  - الطاقة الكامنة للشحنة q الموجودة في حقل qs.
  - أو الطاقة الكامنة للشحنة qs الموجودة في حقل q.
  - أو طاقة المجموعة المعزولة المتكونة من الشحنتين النقطيتين q وqs.
- تعرف الطاقة الكامنة على أساس مستوى أو مرجع صفري، كما في حالة الكمون:
  - الكمون: $V = K\frac{q_S}{r} + C$

إذا افترضنا أن الكمون ينعدم في المالانهاية فإن C = 0 ومنه نجد عبارة الكمون المطلق:

$$V = K\frac{q_S}{r}$$

$$E_p = qV_S + C = \frac{qq_s}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

- الطاقة الكامنة:

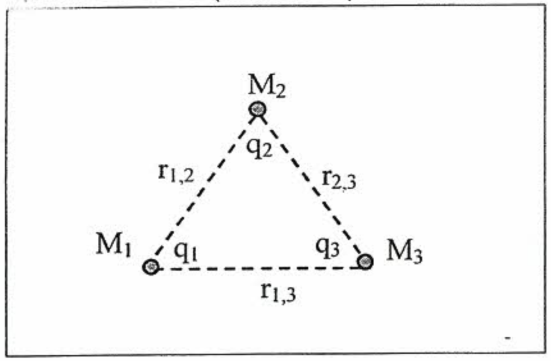
ينعدم الكمون في المالانهاية يؤدي إلى انعدام الطاقة الكامنة، ومنه C = 0 وبالتالي نجد عبارة الطاقة الكامنة المطلقة:

$$E_p = qV_s = \frac{qq_s}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad [\text{م: } IX - 5]$$

3.IX الطاقة الكامنة لجملة شحنات

3.أ. الطاقة الكامنة المتبادلة بين مجموعة من الشحنات.

ندرس أولا حالة ثلاث شحنات نقطية ثم نعمم. لتكن ثلاث شحنات نقطية q_1, q_2, q_3 موضوعة عند النقاط M_1, M_2, M_3 على الترتيب (ش: IX − 2) المسافات البينية $r_{1,2}, r_{1,3}, r_{2,3}$.



نبحث عن إيجاد الطاقة الكامنة لهذه المجموعة، لأجل هذا نشكل المجموعة بنقل الشحنات الواحدة تلو الأخرى من الما لانهاية إلى مواضعها النهائية، نحتاج لذلك بذل عمل (شغل).

- نضع الشحنة q_1، عند M_1 الفضاء خالي من أية شحنة أخرى (غير واقعة في أي حقل) ومنه: $W_1=0$، تخلق الشحنة q_1 عند M_2 كمونا V:

$$V = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}}$$

- لنقل q_2 من مالانهاية إلى M_2، يجب تقديم عمل (حسب المعادلة [م: IX −4]

$$W_2 = q_2 V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}} \qquad [\text{م: } IX - 6]$$

تخلق الشحنتين q_1، q_2 عند M_3 كمونا V^1:

$$V' = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,3}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{2,3}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{1,3}} + \frac{q_2}{r_{2,3}}\right]$$

- لنقل الشحنة q_3 إذا من مالانهاية إلى M_3، يجب تقديم عمل (حسب المعادلة م: IX − 4).

$$W_3 = q_3 V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_3}{r_{1,3}} + \frac{q_2 q_3}{r_{2,3}}\right] \qquad [\text{م: } IX - 7]$$

وباختصار، لوضع الشحنات الثلاث في مواضعها M_1، M_2، M_3 يجب تقديم عمل كلي مقداره:

$$W = E_p = W_1 + W_2 + W_3$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{q_2q_3}{r_{2,3}}\right] \qquad [\text{IX} - 8 \text{ :م}]$$

وهي الطاقة الكامنة المتبادلة بين الشحنات.

ملاحظة:

➢ الكمون عند النقطة M_1، والناشئ عن كل الشحنات (ماعدا q_1 طبعا)

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_3}{r_{1,3}}\right] \qquad [\text{IX} - 9 \text{ :م}]$$

$$V_1q_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_1q_3}{r_{1,3}}\right] \qquad [\text{IX} - 10 \text{ :م}]$$

➢ الكمون عند النقطة M_2 والناشئ عن كل الشحنات (ماعدا q_2 طبعا).

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{1,2}} + \frac{q_3}{r_{2,3}}\right] \qquad [\text{IX} - 11 \text{ :م}]$$

$$V_2q_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_2q_3}{r_{2,3}}\right] \qquad [\text{IX} - 12 \text{ :م}]$$

➢ الكمون عند النقطة M_3 والناشئ عن كل الشحنات (ماعدا q_3 طبعا)

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{1,3}} + \frac{q_2}{r_{2,3}}\right] \qquad [\text{IX} - 13 \text{ :م}]$$

$$V_3q_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{q_2q_3}{r_{2,3}}\right] \qquad [\text{IX} - 14 \text{ :م}]$$

إذا من العلاقات [14-8] نجد عبارة الطاقة الكامنة المتبادلة بين الشحنات:

$$V_1q_1+V_2q_2+V_3q_3 = 2W = 2E_p$$

$$\Rightarrow Ep = W = \frac{1}{2}\left[V_1q_1 + V_2q_2 + V_3q_3\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} V_iq_i \qquad [\text{IX} - 15 \text{ :م}]$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة بسهولة إلى n شحنة نقطية:

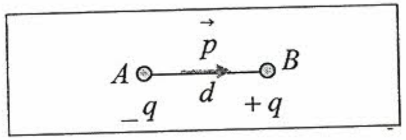
$$E_p = W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_iq_i \qquad [\text{IX} - 16 \text{ :م}]$$

حيث V_i الكمون الناشئ عن كل الشحنات ماعدا الشحنة q_i عند موضع هذه الأخيرة (M_i)

➢ وجود شحنة كهربائية في حقل شحنة أخرى أو مجموعة شحنية يكسبها طاقة كامنة.

3.ب: طاقة ثنائي قطب في حقل كهربائي خارجي

ليكن ثنائي قطب كهروستاتيكي AB عزمه القطبي $\vec{P}$، موضوع في حقل كهربائي خارجي (أي مصدره ليس الحقل الناشئ عن شحنتي الثنائي) (ش: 3 – IX)، بما أن المسافة بين الشحنتين صغيرة جدا $(d <<)$، يمكن اعتبار أن الحقل عند A مشتق من كمون V وعند B مشتق من كمون $V+dV$.



طاقة الثنائي:

$$E_p = -qV + q(V+dV) = qdV \qquad [\text{IX} - 17 \text{ :م}]$$

بما أن $d=AB$ صغير جدا ومن العلاقة التدرجية بين الحقل والكمون، فإنه يمكن كتابة:

$$dV = -\vec{E}\cdot\vec{AB} = -\vec{E}\cdot\vec{d} \qquad [\text{IX} - 18 \text{ :م}]$$

و منه الطاقة الكامنة:

$$E_p = -q\vec{E}\cdot\vec{d} = -\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad [\text{IX} - 19 \text{ :م}]$$

حيث: $\vec{p} = q\vec{d}$ هو عزم الثنائي (العلاقة [م:1-V]).

3.ج: طاقة توزيع شحني مستمر:

يمكن تمديد المجموع في المعادلة السابقة [م: 16 – IX] إلى تكامل إذا كان لدينا توزيع شحني مستمر، نقسم الجسم المشحون إلى أجزاء عنصرية $d\tau$ كل منها يحمل شحنة عنصرية dq تخضع هذه الشحنة لكمون V، نجد:

➢ في حالة توزيع حجمي: $dq = \rho d\tau, W = Ep = \frac{1}{2}\iiint_{\tau}\rho V d\tau \qquad [\text{IX} - 20 \text{ :م}]$

➢ في حالة توزيع سطحي: $dq = \sigma ds, W = Ep = \frac{1}{2}\iint_{S}\sigma V ds \qquad [\text{IX} - 21 \text{ :م}]$

➢ في حالة توزيع طولي: $dq = \lambda dl, W = Ep = \frac{1}{2}\int_{l}\lambda V dl \qquad [\text{IX} - 22 \text{ :م}]$

4.IX الطاقة المخزنة في ناقل مشحون

4.أ: حالة ناقل وحيد:

المطلوب حساب الطاقة المخزنة في ناقل عند شحنه، أي عندما ينتقل كمونه من 0 إلى القيمة V وتنتقل شحنته في نفس الوقت من 0 إلى q.

عند نقل شحنة عنصرية dq من كمون صفري (المالانهاية مثلا) إلى موصل كمونه V، الطاقة المخزنة تتغير بالمقدار:

$$dW = dE_p = V.dq$$ [م: IX – 23]

لكن كمون الناقل وشحنته يرتبطان دوما بالعلاقة: [م: IX – 24]

وبالتالي الطاقة العنصرية الكامنة المخزنة في الناقل:

$$dW = dE_p = CVdV$$

إذا الطاقة الكلية الكامنة المخزنة في الموصل:

$$W = E_p = C\int_0^V Vdy = \frac{1}{2}CV^2$$ [م: IX – 25]

تكتب إذا الطاقة الكامنة المخزنة في ناقل كما يلي:

$$E_p = W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$ [م: IX – 26]

4.ب: تعميم إلى حالة n ناقل:

نعلم أن الشحنات تتوزع على سطح ناقل متوازن، وأن أي ناقل (i) من مجموعة النواقل يتميز بكمون V_i وشحنة q_i، نرفق عندها بكل ناقل الطاقة [م: IX – 26]:

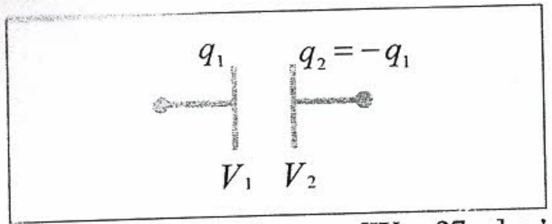
$$W_i = E_{p_i} = \frac{1}{2}q_iV_i$$

مجموعة النواقل تخزن طاقة كلية إذا، مقدارها:

$$W = E_p = \sum_{i=1}^{n} E_{p_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_iV_i$$ [م: IX – 27]

4.جـ: حالة مكثفة:

تتكون المكثفة من موصلين شحنتيهما على الترتيب q_1، q_2، كمونيهما V_1، V_2 (إلى IX – 4) في حالة حث كلي:



الطاقة الكامنة للموصلين [م: IX – 27]:

$$W = E_p = \frac{1}{2}[V_1q_1 + V_2q_2]$$
$$= \frac{1}{2}[V_1q_1 - V_2q_1] = \frac{1}{2}q_1[V_1 - V_2] = \frac{1}{2}q_1V$$

ومن خلال العلاقة بين الشحنة وكمون المكثفة (q =CV) يمكن كتابة:

$$W = E_p = \frac{1}{2}q_1V = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C}$$ [م: IX – 28]

هذه العلاقة صحيحة مهما يكن شكل المكثفة (مستوية، كروية أو أسطوانية).

5.IX كثافة الطاقة

تعريفنا للطاقة الكهروستاتيكية متعلق بالحقل المسؤول عن القـوة الكهربائيـة $\left(\vec{F}=q\,\vec{E}\right)$، إذا منطقيا تتموضع الطاقة في جزء الفضاء أين يوجد الحقل.

نسمي كثافة الطاقة: الطاقة الكامنة في وحدة الحجم، ويرمز لها بالرمز w.

$$w=\frac{E_p}{\tau}=\frac{W}{\tau}\qquad [م: IX-29]$$

حيث τ هو الحجم

نحسب كثافة الطاقة في حالة المكثفة المستوية (ش: IX − 3)، حيث الحقل منتظم بين لوحيهـا، ونفترض أن الكثافة منتظمة كذلك.

- الطاقة الكامنة لمكثفة مستوية (مجموعة ناقلين)، تعطى بالمعادلة [م:IX −28].

$$W=E_p=\frac{1}{2}q_1V=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C}$$

- الحجم المحصور بين لوحي المكثفة يساوي $S.d$

حيث S مساحة اللوح الواحد و d المسافة بين اللوحين:

$$w=\frac{E_p}{\tau}=\frac{W}{\tau}=\frac{CV^2}{2Sd}\qquad [م: IX-30]$$

وبما أن سعة المكثفة المستوية هي [من م: VIII − 7]:

$$C=\varepsilon_0\frac{S}{d}$$

و الحقل منتظم بين لوحيها

$$V=V_1-V_2=E.d$$

فإن كثافة الشحنة تعطى بـ:

$$w=\frac{CV^2}{2S.d}=\frac{\varepsilon_0S(E.d)^2}{2Sd^2}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\qquad [م: IX-31]$$

هذه العلاقة استنتجت في الحالة الخاصة بالمكثفة المستوية لكنها تبقى صـالحة لكـل الحـالات الأخرى، وأينما وجد حقل كهربائي عند نقطة ما من الفضاء فإنه يمكن التفكير بأن تلك النقطة هي موضع لطاقة كامنة، كثافتها الحجمية تعطى بالعلاقة [م: IX − 31].

ملاحظـــة:

يمكن إيجاد عبارة الطاقة الكهروستاتيكية الكامنة الناشئة عن توزيع شحني حجمـي وذلـك بدلالة شدة الحقل انطلاقا من عبارة كثافتها [م: IX − 31] كما يلي:

$$W=Ep=\iiint_\tau w\,d\tau=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_\tau E^2d\tau\qquad [م: IX-32]$$

ملخص

- الطاقة الكامنة لشحنة نقطية q واقعة في حقل q_s (أو طاقة الجملة المعزولة المتكونة من الشحنتين q و q_s):

$$E_p=\frac{qq_s}{4\pi\varepsilon_0r}$$

- الطاقة الكامنة المتبادلة بين مجموعة من الشحنات النقطية:

$$E_p=W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}V_iq_i$$

- طاقة ثنائي في حقل كهربائي خارجي:

$$E_p=-q\vec{E}\cdot\vec{d}=-\vec{p}\cdot\vec{E}$$

- طاقة توزيع شحني مستمر:
  - في حالة توزيع حجمي: $dq=\rho d\tau,W=Ep=\frac{1}{2}\iiint_V\rho Vd\tau$
  - في حالة توزيع سطحي: $dq=\sigma ds,W=Ep=\frac{1}{2}\iint_S\sigma Vds$
  - في حالة توزيع طولي: $dq=\lambda dl,W=Ep=\frac{1}{2}\int_L\lambda Vdl$

- الطاقة المخزنة في ناقل مشحون:
  - حالة ناقل وحيد: $W=E_p=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}qV=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
  - حالة n ناقل: $W=E_p=\sum_{i=1}^{n}E_{p_i}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iV_i$

- الطاقة المخزنة في مكثفة:

$$W=E_p=\frac{1}{2}q_1V=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C}$$

- كثافة الطاقة:

$$w=\frac{CV^2}{2S.d}=\frac{\varepsilon_0S(E.d)^2}{2Sd^2}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$$

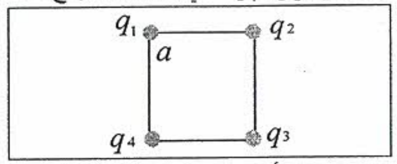
- طاقة توزيع مستمر بدلالة الحقل:

$$W=E_p=\iiint_\tau wd\tau=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_\tau E^2d\tau$$

تمارين محلولة

التمرين 01:

توضع أربع شحنات نقطية q_1, q_2, q_3, q_4 في رؤوس مربع ضلعه a (ش: 5 – IX).



أ. جد الكمون الكهروستاتيكي عند كل رأس من رؤوس المربع والناشئ عن الشحنات الثلاث الأخرى.

ب. جد الطاقة الكهروستاتيكية الكامنة E_p المكافئة لتشكيل هذه الجملة من الشحنات

ج. أحسب الطاقة الكهروستاتيكية الكامنة E_p في الحالات الخاصة الآتية:

1. $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$

2. $q_1 = q_3 = q\ ,\quad q_2 = q_4 = -q$

الحل

أ. الكمونات عند رؤوس المربع

$$V_1 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 a}\left(q_2 + q_4 + \frac{q_3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 a}\left(q_1 + q_3 + \frac{q_4}{\sqrt{2}}\right)$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 a}\left(q_2 + q_4 + \frac{q_1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 a}\left(q_1 + q_3 + \frac{q_2}{\sqrt{2}}\right)$$

ب. الطاقة الكامنة اللازمة لتشكيل هذه الجملة:

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} E_{p_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3 + q_4 V_4\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 a}\left[(q_1 + q_3)(q_2 + q_4) + \frac{q_1 q_3 + q_2 q_3}{\sqrt{2}}\right]$$

ج. 1. الشحنات الأربع متساوية: $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$

$$E_p = \frac{q^2}{2\pi \varepsilon_0 a}\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

2. $q_1 = q_3 = q\ ,\quad q_2 = q_4 = -q$

$$E_p = \frac{-q^2}{2\pi \varepsilon_0 a}\left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{-1.64\, q^2}{2\pi \varepsilon_0 a}$$

التمرين 02:

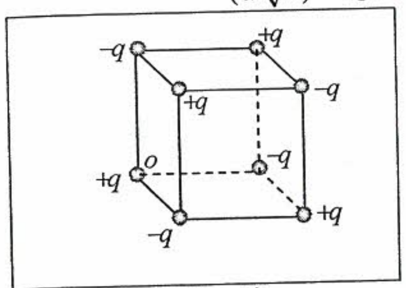
نعتبر مجموعة من الشحن النقطية$+q$ و $-q$ موضوعة على التناوب في رءوس مكعب طول ضلعه a (ش: 6 – IX)، أحسب الطاقة الكهروستاتيكية للجملة.

الحل

الشكل(ش: 22– IX):

نستعمل طريقة ثنائيات الشحنة، الأبعاد في هذه التركيبة هي:

- أضلاع المكعب الإثنى عشر (a)
- الأقطار الإثنى عشر لأوجه المكعب الستة $(a\sqrt{2})$
- أقطار المكعب الفضائية الأربعة $(a\sqrt{3})$



- عدد الثنائيات: $C_8^2 = \frac{8(8-1)}{2} = 28$ ثنائية
- تتوزع كما يلي:
  - 12 ثنائية $(-q,+q)$ شحنية البعد بينها a
  - 6 ثنائيات $(+q,+q)$ شحنية البعد بينها $a\sqrt{2}$
  - 6 ثنائيات $(-q,-q)$ شحنية البعد بينها $a\sqrt{2}$
  - 4 ثنائيات $(-q,+q)$ شحنية البعد بينها $a\sqrt{3}$

الطاقة الكلية للجملة إذن:

$$W = E_P = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[-12+\frac{6}{\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\right]$$
$$= -5{,}82\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

التمرين 03:

تمثل بلورة شاردية بتوزيع خطي لا نهائي لأيونات من إشارتين مختلفتين، شحنتيهما على الترتيب $+q$ و $-q$، موزعتين بالتناوب على المحور OX، المسافة بينهما a (ش: 7 - IX). جد طاقات التفاعل W^- و W^+ لشاردة موجبة أو سالبة مع بقية الشوارد

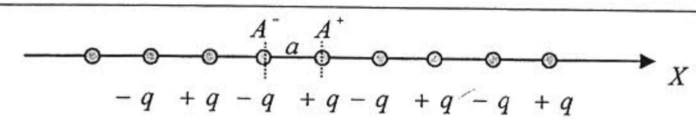
(تذكير: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{2}$)

الحل

كل شاردة واقعة في الحقل الناشئ عن بقية الشحنات، طاقة تفاعلها مع هذا الحقل هي:

$W^+ = qV^+$ بالنسبة لشاردة موجبة و $W^- = qV^-$ بالنسبة لشاردة سالبة

حيث: V^+ و V^- هما الكمونين المحسوبين عند موقعي الشاردتين A^+ و A^- (ش: 7 - IX).



من تناظر الجملة حول كل من A^+ و A^-:

$$V^+ = 2\left[-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{3a}+......\right]$$
$$= -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+..........\ ....\ ..\right]$$

بنفس الطريقة نجد:

$$V^- = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+......................\right] = -V^+$$

و من ثمة نجد أن الطاقة:

$$W^+ = W^- = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+......................\right]$$

من أجل $x = 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - .....$$

إذن عبارة الطاقة:

$$W = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\ln 2$$

التمرين 04:

كرة معزولة كهربائيا، نصف قطرها R ومشحونة بكثافة شحنية حجمية منتظمة σ. جد عبارة الطاقة الكهروستاتيكية لهذه الشحنة الكروية بدلالة هندستها وكثافة شحنتها وذلك:

أ. انطلاقا من الحقل الكهروستاتيكي الناتج عن هذا التوزيع.

ب. انطلاقا من الكمون الكهروستاتيكي الناتج عن هذا التوزيع.

الحل

أ. الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني مستمر بدلالة الحقل الكهربائي:

$$E_P = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V E^2 d\tau$$

➢ نحسب الحقل بتطبيق نظرية غوص (تناظر كروي) داخل كرة نصف قطرها $r < R$:

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)$$

إذن الحقل:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

➢ بنفس الطريقة الحقل خارج التوزيع الكروي $r > R$:

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right)$$

و منه الحقل:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

الطاقة إذن:

$$E_P = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V E^2 d\tau$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_0^R \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr\right]$$

$$E_P = \frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}\left[\int_0^R r^4 dr + R^6 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr\right]$$

$$= \frac{4\pi}{15}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0} R^5$$

ب. الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني مستمر بدلالة الكمون الكهربائي:

$$E_P = \frac{1}{2}\iiint V\, dq$$

حيث dq عنصر الشحنة لعطى بـــ: $dq = \rho d\tau$

و بالتالي: $E_P = \frac{1}{2}\iiint_V V\rho\, d\tau$

➢ نحسب الحقل داخل الكرة ($r < R$) باستعمال نظرية غوص كما في الحالة أ.:

نجد: $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$

الكمون إذن:

$$V = -\int E dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + c$$

➢ نحسب الحقل خارج الكرة ($r > R$) باستعمال نظرية غوص ثم نحسب الكمون، فنجد بسهولة:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

ثابت التكامل يستنتج من شروط الإستمرارية عندR:

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + c = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{R}\rho$$

إذن: $c = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2$

بالتالي، الكمون داخل التوزيع الكروي:

$$V = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

و منه الطاقة:

$$E_P = \frac{1}{2}\iiint_V V\rho\, d\tau = \frac{\rho^2}{12\,\varepsilon_0}\iiint_V (3R^2 - r^2) d\tau$$

$$= \frac{\rho^2}{12\,\varepsilon_0}\iiint (3R^2 - r^2) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{15}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0} R^5$$

التمرين 05

1. كرة ناقلة S_1 معزولة كهربائيا، نصف قطرها R_1 ومركزها O تحمل شحنة موجبة q_1 وكمونها V_{S1}.

أ. جد عبارة الطاقة الكهروستاتيكية E_{P1} للكرة S_1.

2. تحاط الكرة S_1 بكرة S_2 مجوفة ومعزولة، مركزها O تحمل شحنة كلية q_2 نصف قطرها الداخلي R_2 والخارجي R_3 (ش: 9 – IX) ، عند التوازن الكهروستاتيكي كموني الكرتين V_1 و V_2 على الترتيب.

أ. أعط عبارة الطاقة الكهروستاتيكية E_P لهذه الجملة بدلالة q_1 و q_2 و V_1 و V_2.

ب. عبر عن E_P بدلالة R_1 و R_2 و R_3 و q_1 و q_2.

ج. أستنتج سعة المكثفة الكروية.

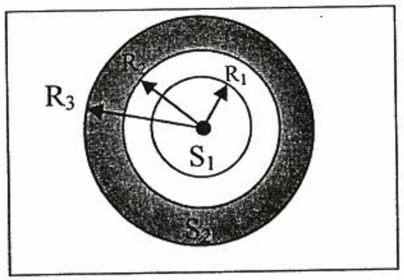
الحل

1. أ. عبارة الطاقة:

$$E_{P1} = \frac{1}{2} q_1 V_{S1}$$

الكمون الكهروستاتيكي للكرة:

$$V_{S1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$



سعة الكرة

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

إذن طاقة الكرة S_1:

$$E_{P1} = \frac{1}{2} q_1 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}$$

2. أ. الناقلين الكرويين في حالة توازن ومعزولين وفي حالة تأثير كلي، شحنتيهما q_1 و q_2 وكمونيهما V_1 و V_2 (يختلفان عن V_{S1} و V_{S2}).

$$Ep = \sum_{i=1}^{2} Ep_i = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 \quad ①$$

الشحنة q_2 محفوظة:

$$q_2 = \dot{q}_2 + \ddot{q}_2$$

$\dot{q}_2$: الشحنة على السطح الداخلي للكرة S_2

$\ddot{q}_2$: الشحنة على السطح الخارجي للكرة S_2

لكن: $\dot{q}_2 = -q_1$ و $\ddot{q}_2 = q_2 - \dot{q}_2 = q_1 + q_2$

و منه الطاقة الكامنة:

$$E_p = \sum_{i=1}^{2} E_{p_i} = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \left[\frac{1}{2}(-q_1) V_2 + \frac{1}{2} \ddot{q}_2 V_2\right]$$

$$= \frac{1}{2} q_1 (V_1 - V_2) + \frac{1}{2} \ddot{q}_2 V_2 \quad ②$$

و كأنها مجموع طاقة مكثفتين:

الحد الأول: $\frac{1}{2} q_1 (V_1 - V_2) = \frac{1}{2C} q_1^2 = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$

الحد الثاني: $\frac{1}{2} \ddot{q}_2 V_2$ طاقة مكثفة معزولة كمونها V_2 وتحمل شحنة $\ddot{q}_2$

ب.

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi \varepsilon_0 R_1} + \frac{\dot{q}_2}{4\pi \varepsilon_0 R_2} + \frac{\ddot{q}_2}{4\pi \varepsilon_0 R_3}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] + \frac{\ddot{q}_2}{4\pi \varepsilon_0 R_3}$$

$$V_2 = \frac{\ddot{q}_2}{4\pi \varepsilon_0 R_3}$$

بالتعويض في عبارة الطاقة ① نجد:

$$E_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} + \frac{1}{2} \frac{(q_1 + q_2)^2}{4\pi \varepsilon_0 R_3} \quad ③$$

ج. سعة المكثفة الكروية: من المعادلة ②

$$C = 4\pi \varepsilon_0 R_1 R_2 / (R_1 - R_2)$$

التمرين 06:

لتكن حلقة نصف قطرها R مشحونة بكثافة شحنية خطية منتظمة موجبة $\lambda > 0$، نـضع عنـد نقطة M من المحور OZ ثنائي عزمه $\vec{p}$ موازي للمحور OZ وباتجاهه. من اجل اية قيمة لـ z يكون الثنائي في وضعية توازن؟ أمتحن إستقرارية مواضع التوازن هذه.

الحل

➢ ندرس توازن الجملة انطلاقا من دراسة دالة الطاقة الكامنة.

➢ يعطى الحقل الناشئ عن الحلقة عند نقطة M تقع على ارتفاع z من محورها(التمرين 5 الفصل 3).

$$\vec{E} = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

طاقة الثنائي في هذا الحقل هي:

$$W = E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\frac{p\lambda R z}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

يكون الثنائي متوازنا عند القيم الحدية للطاقة الكامنة، ندرس إشارة المشتق $\frac{dW}{dz}$

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{p\lambda R (R^2 - 2z^2)}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{5/2}}$$

مواضع التوازن تكافئ $\frac{dW}{dz} = 0$ أي أن:

$$z = \mp \frac{R}{\sqrt{2}}$$

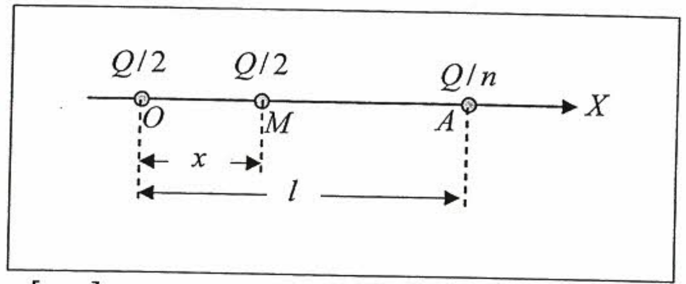
• يكون التوازن مستقرا عند القيم الحدية الصغرى، اي عند $z = \frac{R}{\sqrt{2}}$

• يكون التوازن مستقرا عند القيم الحدية الصغرى، اي عند $z = -\frac{R}{\sqrt{2}}$

تمارين للحل

التمرين 01:

لتكن الجملة الآتية والمتكونة من ثلاث كريات نقطية ناقلة (ش: 9 − IX) الكرية الواقعة عند مبدأ المحور O شحنتها ثابتة $Q/2$، كذلك شحنة الكرية A الواقعة على بعد l من O ثابتة وتساوي Q/n حيث $(n>0)$.



1. جد الحقل $V(M)$ عند نقطة M تبعد مسافة x من O ، حيث $x \in [0 \quad l]$.
2. جد الطاقة الكامنة W لتفاعل الكرية المتحركة M والتي تحمل الشحنة $Q/2$ مع الحقل الناشئ عن الكريتين الواقعتين عند O و A.
3. بين أن الطاقة أصغرية من أجل قيمة x_0 لـ x يطلب تعيينها.

التمرين 02:

جد عبارات الطاقة الكهروستاتيكية المخزنة في المكثفات:

1. المستوية.
2. الأسطوانية.
3. الكروية.

بعد شحنها ثم عزلها وذلك بدلالة سعاتها وشحنات ألواحها.

التمرين 03:

لتكن كرة مركزها O ونصف قطرها r_0، تحمل شحنة سطحية منتظمة σ

1. أ. أحسب الحقل والكمون عند كل نقطة M من الفضاء.

ب. أدرس الحالة الخاصة: $r = r_0$

2. أحسب الطاقة الكهروستاتيكية لهذا الناقل $E_P = W$
3. نقوم بتقليص نصف قطر الكرة بـ dr_0 $(r_0 \to r_0 + dr_0, dr_0 < 0)$ شحنتها تبقى ثابتة.

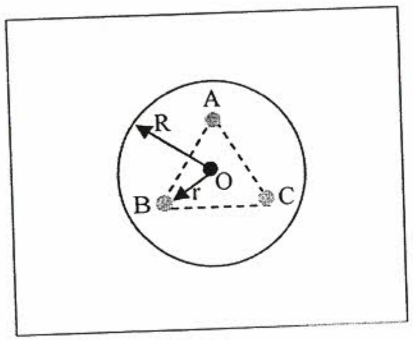
أ. أحسب التغير dE_P في الطاقة الكهروستاتيكية لهذا الناقل.

ب. عبر عن dE_P بدلالة التغيرات التي تطرأ على الحقل نتيجة هذا النقل.

4. جد عبارة الطاقة $E_P = W$ بطريقة أخرى.

التمرين 04:

كرة مركزها O ونصف قطرها R، شحنتها $3q \; (q>0)$ تتوزع في حجمها بانتظام بكثافة ρ. توجد بداخلها ثلاث شحنات سالبة موضوعة عند رؤوس مثلث متقايس الأضلاع ABC مركزه هو نفسه هو مركز الكرة. (ش: 10 − IX)



1. أعط عبارات:

أ. الكمون V_1 عند النقطة A و الناتج عن الشحنتين الموضوعتين عند النقطتين B ، C

ب. الكمون V_2 عند النقطة A والناتج عن التوزيع الشحني الحجمي، حيث:

$V_2(O) = 0$

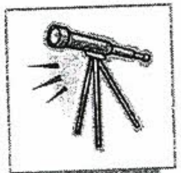
ج. أستنتج الكمون الكلي V_A عند A

2. بالإعتماد على تعريف العمل، جد الطاقة الكامنة الكهروستاتيكية $E_p(r)$ للشحنات الثلاث السالبة المكافئة لنقلها من ما لانهاية إلى مواضعها وذلك بوجودها في حقل التوزيع الشحني الحجمي.

3. أرسم منحني تغيرات $E_p(r)$ ، جد مواضع التوازن للشحنات السالبة الثلاثة ثم حدد طبيعة هذا التوازن.

10

ملحق



الأهداف

- العلاقات الكهروستاتيكية
- جبر الأشعة
- نظم الإحداثيات
- التحليل الشعاعي
- قاموس ثلاثي
- المراجع